6.2. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

6.2.1. Das Diagonalverfahren zur Lösung von LGS (siehe auch 1.4.1.)

Äquivalenzumformungen bei linearen Gleichungssystemen in Matrizenschreibweise
1. Eine Zeile kann mit einer reellen Zahl **ungleich Null multipliziert** werden.
2. Eine Zeile kann zu einer anderen Zeile **addiert** werden
3. Zwei Zeilen können miteinander **vertauscht** werden

Hinweis für LGS mit Parametern: Schwierigkeiten mit 1. lassen sich vermeiden, wenn beim Gauß-Verfahren die jeweils zur Elimination benutzte Zeile durch Vertauschung so gewählt wird, dass das **erste Element ungleich 0 frei von Parametern** ist.

Beispiel für ein LGS mit keiner Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 11 & -7 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow L = \{\}$$

Beispiel für ein LGS mit einer Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 11 & -7 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow L = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beispiel für ein LGS mit vielen Lösungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 22 \\ 6 & 7 & 8 & 40 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 8 & 40 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow L = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R\right\}$$

Homogene und inhomogene LGS
Ein linearen Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn auf der rechten Seite nur Nullen stehen. Stehen auf der rechten Seite Zahlen ungleich Null, so heißt das LGS **inhomogen**.

Übung: Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS Nr. 1

Lösbarkeit von homogenen und inhomogenen LGS

inhomogene LGS haben
- keine Lösung,
- genau eine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen

homogene LGS haben
- genau eine Lösung (die **triviale** Lösung $x_1 = x_2 = ... 0$) oder
- unendlich viele Lösungen

6.2.2. Das Rangkriterium zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen (LGS) lässt sich mit Hilfe von **erweiterten** (Koeffizienten-) **Matrizen** untersuchen.

Beispiel: Erweitert man die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ um den Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

so erhält man die erweiterte Matrix $(A|\vec{a}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

Rang einer Matrix
Der Rang Rg(A) einer Matrix A ist die Minimalzahl der vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren von A, die durch Äquivalenzumformungen erzeugt werden können.

Übungen: Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS Nr. 2 und 3

Rangkriterium zur Lösbarkeit von LGS
Ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen besitzt

- keine Lösung, falls	$Rg(A) < Rg(A \Leftarrow \vec{b})$
- genau eine Lösung, falls	$Rg(A) = Rg(A \Leftarrow \vec{b}) = n$
- unendlich viele Lösungen, falls	$Rg(A) = Rg(A \Leftarrow \vec{b}) < n$

Übungen: Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS Nr. 4
Aufgaben zum Rangkriterium

Um die **Struktur der Lösungsmenge** eines LGS besser zu verstehen, untersucht man die Verknüpfung der Koeffizientenmatrix A mit dem Vektor $\vec{x} = (x_1; x_2; ...)$. Das Ziel besteht in der Darstellung eines LGS als **Matrizengleichung** $A * \vec{x} = \vec{b}$, die sich allerdings nicht immer auch nach $\vec{x}$ **auflösen** lässt. Der Stern * bezeichnet dabei die zu untersuchende **Matrizenmultiplikation** zwischen A und $\vec{x}$.

6.2.3. Struktur der Lösungsmenge von homogenen und inhomogenen LGS

Beispiele: Aufgaben zur Lösbarkeit von LGS: Ordnungsmerkmale und Struktur der Lösungsmengen in Aufgabe 1

Satz
Für ein **inhomogenes** LGS $A * \vec{x} = \vec{y}$ und das **zugehörige homogene** LGS $A * \vec{x} = \vec{0}$ gilt:

$L_{inhom} = \{\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d} : r, s, t \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow L_{hom} = \{r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d} : r, s, t \in \mathbb{R}\}$ und $A * \vec{a} = \vec{y}$

In Worten:
Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS setzt sich zusammen aus einer **speziellen** Lösung $\vec{a}$ des **inhomogenen** LGS und **allen** Lösungen $r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}$ des **zugehörigen homogenen** LGS.

Beweis:
1. $\Rightarrow$: $A * \vec{a} = A * (\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} + 0\vec{d}) = \vec{y}$ und $A * (r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}) = A * (\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d} - \vec{a}) = A * (\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}) - A * \vec{a} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$.
2. $\Leftarrow$: $A * \vec{a} = \vec{y}$ und $A * (r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}) = \vec{0} \Rightarrow A * (\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}) = A * \vec{a} + A * (r\vec{b} + s\vec{c} + t\vec{d}) = \vec{y} + \vec{0} = \vec{y}$.

Definition:
Die zur Darstellung der Lösungsmenge L der Gleichung $A * \vec{x} = \vec{y}$ benötigte **Mindestzahl an Parametern** wird als Zahl der **Freiheitsgrade** oder **Dimension dim L** bezeichnet.

Satz
Für ein LGS $A * \vec{x} = \vec{y}$ ist $\dim L_{inh} = \dim L_{hom} = n - Rg(A)$. Insbesondere hängt die Zahl der Freiheitsgrade nicht von der rechten Seite ab!
Beweis:
$\dim L_{inh} = \dim L_{hom}$ ist klart nach dem vorangegangenen Satz.
$\dim L_{hom} = n - Rg(A)$ ergibt sich aus den Definitionen: Bringt man A mit dem Gauß-Verfahren auf Dreiecksform und erzeugt so viele Nullzeilen wie möglich, so erhält man in der untersten Gleichung $n - Rg(A)$ unbestimmte Variablen, die man als Parameter frei wählen kann. Da die Parameter nicht voneinander abhängen, lässt sich ihre Zahl auch nicht mehr verringern.

Die **geometrische Bedeutung der Dimension** der Lösungsmenge eines LGS ergibt sich durch Deutung der Vektoren als **Verschiebungen im Raum**, wobei die Lösungsmengen als **Punkte, Geraden und Ebenen** erscheinen. (siehe 6.1.)