

6.3. Aufgaben zu Matrizengleichungen

Aufgabe 1: Invertierung

Bestimme, falls möglich, die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R},$$

Aufgabe 2: Matrizengleichungen

Löse die folgenden Matrizengleichungen nach X auf:

- a) $A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot (X + C)$ d) $(A \cdot X^T)^T - X \cdot B + 3 \cdot X = E$
 b) $2 \cdot A \cdot X + 3 \cdot B = 4 \cdot (X - C)$ e) $2 \cdot A \cdot X + B \cdot X - 3 \cdot C = 2 \cdot (X - C) + 3 \cdot B$
 c) $3A \cdot X - 4 \cdot B = X - C$ f) $(A \cdot B) \cdot (A \cdot X \cdot B)^{-1} = E$

Aufgabe 3: Matrizengleichungen

Berechne die Lösungsmenge der folgenden Matrizengleichungen:

a) $A \cdot X + B = A$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot B + 2 \cdot X = B$ mit $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

c) $4 \cdot X - X \cdot A = X \cdot A - X \cdot C^T + 3 \cdot (B + X)$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $2 \cdot A^T \cdot X + 2 \cdot X = B + X$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) $B \cdot (A \cdot X)^T = B \cdot A - 2 \cdot E$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Matrizengleichung mit Parameter

Gegeben ist die Matrix $A_t = \begin{pmatrix} 2 & t+2 & 2 \\ -3 & 1 & t-1 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Zeige durch Umformung der Matrizengleichung

$3 \cdot A_1^{-1} \cdot X = A_1^{-1} - A_1 \cdot X$, dass $X = (3 \cdot E + A_1^2)^{-1}$ und berechne X.

