6.3. Matrizengleichungen

6.3.1. Berechnung der inversen Matrix

Beispiel:

Bestimme die Lösungsmenge der Matrizengleichung $A*X = B$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösungsansatz:
Würden anstelle der Matrizen reelle Zahlen stehen, so könnt man nach der gesuchten Größe x auflösen, indem man durch a teilt. Das bedeutet aber gerade, dass beide Seiten der Gleichung mit der zu a **inversen** Zahl (dem **Kehrwert**) $\frac{1}{a} = a^{-1}$ multipliziert werden:

$$\begin{aligned} ax &= b \qquad |\cdot a^{-1} \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ 1x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

Entsprechend kann man auch bei einer Matrizengleichung vorgehen, wobei man sich aber wegen der **fehlenden Kommutativität** entscheiden muss, ob von links oder von rechts multipliziert wird. Man multipliziert also beide Seiten **von links** mit der (zu A) **inversen Matrix** A^{-1}:

$$\begin{aligned} A*X &= B \qquad |*A^{-1} \text{ von links} \\ A^{-1}*A*X &= A^{-1}*B \\ E*X &= A^{-1}*B \\ X &= A^{-1}*B \end{aligned}$$

Die Wirkung des Faktors a in einer Gleichung wird durch den Kehrwert neutralisiert: Der Kehrwert a^{-1} einer reellen Zahl a ist die Zahl, die mit a multipliziert wieder 1 ergibt: $a^{-1}*a = 1$. Entsprechend definiert man die inverse Matrix:

Die inverse Matrix
Die zu einer gegebenen Matrix A **inverse** Matrix A^{-1} ist die Matrix, die mit A multipliziert die **Einheitsmatrix** E ergibt: $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$.

Berechnung der inversen Matrix mit dem Diagonaleverfahren (siehe 3.0.1.)

Man setzt die gegebenen Matrizen A und E und die gesuchte Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ in die Definitionsgleichung ein:

$$\begin{array}{ccccc} A & * & A^{-1} & = & E \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & * & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

oder in der früher benutzten Darstellung für die Matrizenmultiplikation

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Das Produkt des 1. Spaltenvektors von A^{-1} mit A muss also den 1. Spaltenvektor von E ergeben, entsprechend müssen der 2. und der 3. Spaltenvektor von A^{-1} auf den 2. und 3. Spaltenvektor von E führen. Wenn man diese drei Bedingungen einzeln hinschreibt, erhält man drei lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da die Koeffezientenmatrix bei allen drei Systemen gleich ist, kann man die Äquivalenzumformungen jeweils parallel ausführen und erhält nach dem Diagonalverfahren die folgenden Systeme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Die Spaltenvektoren der inversen Matrix A^{-1} sind also

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnung der inversen Matrix mit dem Diagonalverfahren
1. Man erweitert die gegebene Matrix A mit der entsprechenden Einheitsmatrix E.
2. Die erweiterte Matrix (A|E) wird mit dem Gauß-Verfahren so umgeformt, dass auf der linken Seite eine Einheitsmatrix entsteht.
3. Die rechte Hälfte der umgeformten Matrix ist dann die gesuchte Inverse A^{-1}:

$$(A|E) \xrightarrow{\text{Diagonalverfahren}} (E\,|A^{-1})$$

Probe:

$$A*A^{-1} = E \qquad \text{und} \qquad A^{-1}*A = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachdem die Inverse A^{-1} gefunden ist, kann nun die Matrizengleichung aufgelöst werden und man erhält

$$X = A^{-1}*B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & -13 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Übungen: Aufgaben zu Matrizengleichungen Nr. 1

6.3.2. Auflösen von Matrizengleichungen mit der inversen Matrix

Rechenregeln für inverse Matrizen (vgl. Regeln für transponierte Matrizen 3.1.2.)
1. Für eine invertierbare Matrix A gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$ und $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
2. Für eine invertierbare Matrix A und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $(r\cdot A)^{-1} = \frac{1}{r}\cdot A^{-1}$
3. Für zwei invertierbare Matrizen A und B gilt $(A*B)^{-1} = B^{-1} * A^{-1}$

Achtung: Summen lassen sich nicht einzeln invertieren: $(A+B)^T \neq A^T+B^T$!

Übungen: Aufgaben zu Matrizengleichungen Nr. 2 - 4