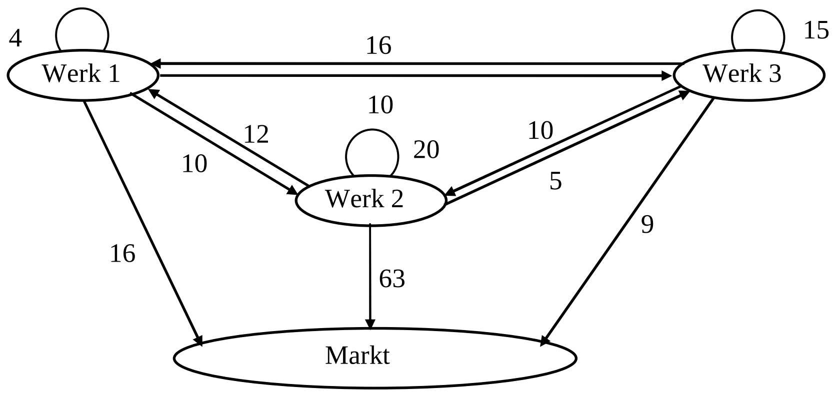
6.4. Beispiel zum Leontief-Modell

Ein Betrieb umfasst drei Zweigwerke. Jedes dieser Zweigwerke bietet ein Produkt an, das sowohl für den Markt, aber auch für die jeweils zwei anderen Zweigwerke und den eigenen Bedarf produziert wird.
Die Güterströme in ME für das Jahr 1995 werden durch das folgende Input-Output-Diagramm dargestellt:



Werk 1 produzierte im Jahr 1995 also 16 ME für den Markt, 4 ME für den eigenen Bedarf, 10 ME für Werk 2 und 10 ME für Werk 3.

In Tabellenform ergibt sich die folgende Darstellung:

von \ an	Werk 1	Werk 2	Werk 3	Markt
Werk 1	4	10	10	16
Werk 2	12	20	5	63
Werk 3	16	10	15	9

Die Gesamtproduktion im Jahr 1995 war

von Werk 1 $4 + 10 + 10 + 16 = 40 = x_1$
von Werk 2 $12 + 20 + 5 + 63 = 100 = x_2$
von Werk 3 $16 + 10 + 15 + 9 = 50 = x_3$

Die an den Markt gelieferten Mengen waren

von Werk 1 $16 = y_1$
von Werk 2 $63 = y_2$
von Werk 3 $9 = y_3$

Es stellen sich nun grundsätzlich zwei Fragen:

a) Welche Mengen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ können an den Markt abgegeben werden, wenn ein Produktionsvektor,

z.B. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ vorgegeben wird?

b) Welche Gesamtproduktion $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ muss eingeplant werden, wenn die Marktnachfrage,

z.B. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ vorgegeben wird?

Um diese beiden Fragestellungen zu beantworten stellt man eine (Matrizen)gleichung auf, die einen

allgemeinen Zusammenhang zwischen Produktionsvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Marktabgabevektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ beschreibt.

Dazu bezieht man alle Güterströme auf einen **Output** von jeweils 1 ME von Werk 1, Werk 2 und Werk 3.

Z.B. benötigt Werk 1 für einen Output von 40 ME an Produkt 1

von Werk 1 4 ME
von Werk 2 12 ME
von Werk 3 16 ME

Für einen Output von 1 ME wird jeweils nur noch der vierzigste Teil benötigt:

von Werk 1 $\frac{4}{40}$ ME

von Werk 2 $\frac{12}{40}$ ME

von Werk 3 $\frac{16}{40}$ ME

Für einen Output von x_1 ME benötigt Werk 1 dann:

von Werk 1 $\frac{4}{40} \cdot x_1$ ME

von Werk 2 $\frac{12}{40} \cdot x_1$ ME

von Werk 3 $\frac{16}{40} \cdot x_1$ ME

Entsprechend lassen sich der Bedarf von Werk 2 auf einen Output von x_2 ME und der Bedarf von Werk 3 auf einen Output von x_3 ME umrechnen:

Für einen Output von x_2 ME benötigt Werk 2:

von Werk 1 $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME

von Werk 2 $\frac{20}{100} \cdot x_2$ ME

von Werk 3 $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME

Für einen Output von x_3 ME benötigt Werk 3:

von Werk 1 $\frac{10}{50} \cdot x_3$ ME

von Werk 2 $\frac{5}{50} \cdot x_3$ ME

von Werk 3 $\frac{15}{50} \cdot x_3$ ME

Allgemeingültige Gleichungen erhält man, wenn man wie zu Beginn die Bilanzen für die drei Produkte aufstellt:

- Einerseits werden x_1 ME von Produkt 1 durch das Werk 1 **produziert**.
- Andererseits werden $\frac{4}{40} \cdot x_1$ ME von Werk 1 selbst, $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME von Werk 2, $\frac{10}{50} \cdot x_3$ ME von Werk 3 und schließlich y_1 ME durch den Markt **verbraucht**.

Wenn Produktion und Verbrauch gleich sein sollen, muss also gelten

$$\frac{4}{40} \cdot x_1 + \frac{10}{100} \cdot x_2 + \frac{10}{50} \cdot x_3 + \cdot y_1 = x_1$$

Die Bilanz für das Produkt 2 ist dann

$$\frac{12}{40} \cdot x_1 + \frac{20}{100} \cdot x_2 + \frac{5}{50} \cdot x_3 + \cdot y_2 = x_2$$

Die Bilanz für Produkt 3 ist

$$\frac{16}{40} \cdot x_1 + \frac{10}{100} \cdot x_2 + \frac{15}{50} \cdot x_3 + \cdot y_3 = x_3$$

Durch Übergang zur Matrizenschreibweise erhält man eine Gleichung, die sich entweder

a) nach der gesuchten Marktnachfrage $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ oder

b) nach den gesuchten Produktionszahlen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auflösen lässt:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{40} & \frac{10}{100} & \frac{10}{50} \\ \frac{12}{40} & \frac{20}{100} & \frac{5}{50} \\ \frac{16}{40} & \frac{10}{100} & \frac{15}{50} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} * \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} \qquad | \Leftarrow - \mathbf{A} * \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{A} * \mathbf{x} \qquad \Leftarrow \text{erweitern mit } \mathbf{E}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{E} * \mathbf{x} - \mathbf{A} * \mathbf{x} \qquad \Leftarrow \text{ausklammern}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) * \mathbf{x}$$

Damit erhält man als Antwort auf die Frage a)

$$\mathbf{y} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Die Antwort auf Frage b) ergibt sich durch Auflösen nach **x** (Multiplikation mit $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ von links)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} * \mathbf{y} \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}\right]^{-1} * \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 55 & 9 & 17 \\ 25 & 55 & 15 \\ 35 & 13 & 69 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 48 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die Fragestellung b) sehr häufig auftritt, hat die dabei benutzte Matrix

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 55 & 9 & 17 \\ 25 & 55 & 15 \\ 35 & 13 & 69 \end{pmatrix}$$

einen feststehenden Namen erhalten und heißt **Leontief-Inverse.**