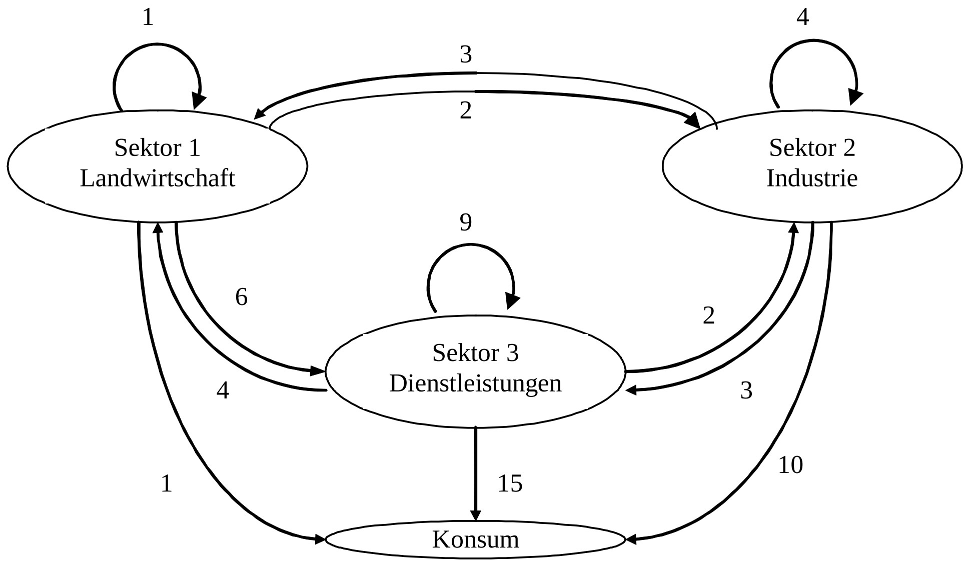
6.4. Das Leontief-Modell

Die Güterströme einer Volkswirtschaft lassen sich durch das folgende Verflechtungsdiagramm (**Gozintograph**) darstellen:



Die Güterströme sind dabei in Mengeneinheiten pro Jahr angegeben. Die Sektoren produzieren verschiedene Gütersorten: Sektor 1 ist für die Gütersorte 1 zuständig, Sektor 2 für die Gütersorte 2 und Sektor 3 für die Gütersorte 3.

Eine gleichwertige Darstellung ist die **Input-Output-Tabelle:**

Output / Input	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Konsum	Gesamt−-produktion
Sektor 1	1	2	6	1	10
Sektor 2	3	4	3	10	20
Sektor 3	4	2	9	15	30

Um zu einer Aussage über die Leistungsfähigkeit der Produktionssektoren zu gelangen, bezieht man für jeweils einen Sektor die Inputmenge auf eine Outputmenge von je 1 ME.

Wenn also von jeder Gütersorte nur 1 ME produziert wird (anstelle von 10, 20 bzw. 30 ME), so benötigt z. B. Sektor 1 $\frac{1}{10}$ ME aus seinem eigenen Bereich , $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ ME von Sektor 2 und $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ ME von Sektor 3.

Die so gewonnenen **Produktionskoeffizienten** sind unabhängig vom Konsum oder der Gesamtproduktion und werden in der **Inputmatrix** A zusammengefasst:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{3}{30} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{20} & \frac{9}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Die Inputmatrix erscheint z.B. in den **Mengenbilanzen** der von den Sektoren 1-3 produzierten Gütersorten 1-3:

$$\text{Gütersorte 1: } 10 = \frac{1}{10}\cdot 10 + \frac{2}{20}\cdot 20 + \frac{6}{30}\cdot 30 + 1$$
$$\text{Gütersorte 2: } 20 = \frac{3}{10}\cdot 10 + \frac{4}{20}\cdot 20 + \frac{3}{30}\cdot 30 + 10$$
$$\text{Gütersorte 3: } 30 = \frac{4}{10}\cdot 10 + \frac{2}{20}\cdot 20 + \frac{9}{30}\cdot 30 + 15$$

Während die in der Inputmatrix A festgelegten Produktionskoeffizienten über die Jahre keiner Änderung unterliegen, können der **Konsumvektor** $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und der **Produktionsvektor** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ in jedem Jahr anders aussehen.

Daraus ergeben sich zwei **Fragestellungen**:

1. Der **Produktionsvektor** $\vec{x} = (10;\ 30;\ 10)^T$ für das folgende Jahr ist gegeben. Wie sieht der entsprechende **Konsumvektor** $\vec{y}$ aus? (D.h., welche Mengen können für den Verbraucher bereitgestellt werden, wenn Sektor 1 10 ME produziert, Sektor 2 30 ME und Sektor 3 10 ME?)
2. Der **Konsumvektor** $\vec{y} = (2;\ 19;\ 7)^T$ für das folgende Jahr ist gegeben. Wie sieht der entsprechende **Produktionsvektor** $\vec{x}$ aus? (D.h., welche Mengen müssen von den drei Sektoren insgesamt produziert werden, damit 2 ME der Gütersorte 1, 19 ME der Gütersorte 2 und 7 ME der Gütersorte 3 an den Verbraucher abgegeben werden sollen?)

Der Zusammenhang zwischen den beiden Größen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt sich, wenn man in der obigen Mengenbilanz die Konsum- bzw. Produktionszahlen durch **Variable** ersetzt:

$$\text{Gütersorte 1: } x_1 = \frac{1}{10}\cdot x_1 + \frac{2}{20}\cdot x_2 + \frac{6}{30}\cdot x_3 + y_1$$
$$\text{Gütersorte 2: } x_2 = \frac{3}{10}\cdot x_1 + \frac{4}{20}\cdot x_2 + \frac{3}{30}\cdot x_3 + y_2$$
$$\text{Gütersorte 3: } x_3 = \frac{4}{10}\cdot x_1 + \frac{2}{20}\cdot x_2 + \frac{9}{30}\cdot x_3 + y_3$$

Wenn man die Gleichungen jeweils nach y auflöst, erhält man ein **lineares Gleichungssystem** in der gewohnten Form:

$$\text{Gütersorte 1: } \left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot x_1 - \frac{2}{20}\cdot x_2 - \frac{6}{30}\cdot x_3 = y_1$$
$$\text{Gütersorte 2: } -\frac{3}{10}\cdot x_1 + \left(1-\frac{4}{20}\right)\cdot x_2 - \frac{3}{30}\cdot x_3 = y_2$$
$$\text{Gütersorte 3: } -\frac{4}{10}\cdot x_1 - \frac{2}{20}\cdot x_2 + \left(1-\frac{9}{30}\right)\cdot x_3 = y_3$$

bzw. in **Matrizenschreibweise**

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & 1-\frac{4}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & 1-\frac{9}{30} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist aber gerade die Differenz aus der Einheitsmatrix E und der Inputmatrix A:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{20} & \frac{6}{30} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{3}{30} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{20} & \frac{9}{30} \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$[E - A] * \vec{x} = \vec{y}$$

Damit läßt sich Frage (1) beantworten: Der gesuchte Konsumvektor ist

$$\vec{y} = [E - A] * \vec{x} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{10} & -\frac{2}{20} & -\frac{6}{30} \\ -\frac{3}{10} & 1-\frac{4}{20} & -\frac{3}{30} \\ -\frac{4}{10} & -\frac{2}{20} & 1-\frac{9}{30} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Beantwortung von Frage (2) wird die Gleichung mit Hilfe der **Leontief Inversen** $[E - A]^{-1}$ nach der gesuchten Größe x aufgelöst:

$$\vec{x} = [E - A]^{-1} * \vec{y} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 55 & 9 & 17 \\ 25 & 55 & 15 \\ 35 & 13 & 69 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Übungen: Fran:. Lineare Algebra für Wirtschaftsgymnasien S. 93 Nr. 2. sowie S. 94 Nr. 4. und 5.