7.0. Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene

Aufgabe 1: Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen
Bestimme die Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen für die folgenden Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ c) $f(x) = x - 2$ e) $f(x) = -10x$ g) $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x + \frac{1}{t}$ mit $t \in \mathbb{R}^*$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ d) $f(x) = -x + 3$ f) $f(x) = 3$ h) $f_t(x) = tx - 2$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2: Schnittwinkel zweier Geraden
Bestimme die Winkel, in denen die Geraden f und g sich gegenseitig und die Koordinatenachsen schneiden.

a) $f(x) = -\frac{1}{2} + 3$ und $g(x) = 2x - 3$. b) $f(x) = 5x - 3$ und $g(x) = -3x - 1$.

Aufgabe 3: Schnittpunkte und Schnittwinkel
Bestimme die Eckpunkte und Innenwinkel des Dreieckes, das durch die Geraden f, g und h gebildet wird.

a) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 2x - 4$, $h(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ b) $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$, $g(x) = -2x$, $h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$

Aufgabe 4: Länge und Mittelpunkt einer Strecke
Berechne den Abstand $\overline{PQ}$ und die Koordinaten des Mittelpunktes $M(x_M|y_M)$ zwischen den Punkten P und Q.

a) P(2|1) und Q(5|3) b) P(1|4) und Q(3|1) c) P(−1|2) und Q(1|−3) d) $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$

Aufgabe 5: Abstand Punkt-Gerade
Gib den Lotfußpunkt F und den Abstand des Punktes P von der Geraden g an.

a) $g(x) = -3x + 11$ und P(0|1) c) $g(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ und P(7|9)

b) $g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ und $P(\frac{5}{2}|-1)$ d) $g(x) = 2x + 5$ und P(3|1)

Aufgabe 6: Abstand Gerade-Gerade
Gib den Abstand der beiden Geraden f und g an.

a) $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$ und $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{20}{4}$ b) $f(x) = \frac{15}{8}x + 2$ und $f(x) = \frac{15}{8}x + 3$

Aufgabe 7: Dreiecksflächen
Berechne die Fläche des Dreieckes ABC.

a) A(1|2), B(8|−1) und C(6|5) b) A(7|7), B(11|9) und C(3|8)

Aufgabe 8: Vektoren in der Ebene

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Zeichne und berechne die Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$ und $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

b) Gib jeweils zwei Vektoren an, die orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen.

Aufgabe 9: Parameterform der Geradengleichung

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

a) Formuliere die Koordinatenform der Gleichung von g.
b) Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden f an, die parallel zu g verläuft.
c) Gib die Parameterform und die Koordinatenform einer Geraden h an, die orthogonal zu g verläuft.
d) Bestimme den Abstand des Punktes P(1|5) zur Geraden g.

Aufgabe 10: Abstände und Winkel mit Parameterformen

Gegeben sind die Punkte A(−1|1), B(1|2) und C(2|4)
a) Gib die Parameterform und die Koordinatenform der drei Geraden an, die das Dreieck ABC begrenzen.
b) Berechne die Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks ABC
c) Berechne die drei Höhen des Dreiecks ABC und seine Fläche.

7.0. Lösungen zu den Aufgaben zu Abständen und Winkeln in der Ebene

Aufgabe 1: Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen

a) $S_x(-4|0)$, $S_y(0|2)$, $\alpha_x \approx 26{,}6°$

b) $S_x(2|0)$ und $S_y(0|\frac{2}{3})$, $\alpha_x \approx 18{,}4°$

c) $S_x(2|0)$, $S_y(0|-2)$, $\alpha_x = 45°$

d) $S_x(3|0)$, $S_y(0|3)$, $\alpha_x = -45°$

e) $S(0|0)$, $\alpha_x \approx 84{,}3°$

f) $S_y(0|3)$, $\alpha_y = 90°$

g) $S_x(t|0)$, $S_y(0|\frac{1}{t})$, $\alpha_x = \tan^{-1}(-\frac{1}{t^2})$,

h) $S_x(\frac{2}{t}|0)$, $S_y(0|-2)$, $\alpha_x = \tan^{-1}(t)$

Aufgabe 2: Schnittwinkel zweier Geraden

a) Schnittpunkte $S_{xf}(6|0)$, $S_{xg}(\frac{3}{2}|0)$, $S_{yf}(0|3)$, $S_{yg}(0|-3)$, $S_{fg}(\frac{12}{5}|\frac{9}{5})$
Schnittwinkel $\alpha = -26{,}56°$, $\beta = 63{,}43°$ und $\gamma = 90°$

b) Schnittpunkte $S_{xf}(\frac{3}{5}|0)$, $S_{xg}(-\frac{1}{3}|0)$, $S_{yf}(0|-3)$, $S_{yg}(0|-1)$, $S_{fg}(\frac{1}{4}|-\frac{7}{4})$
Schnittwinkel $\alpha = 78{,}69°$, $\beta = -71{,}56°$ und $\gamma = 29{,}74°$

Aufgabe 3: Schnittpunkte und Schnittwinkel

a) Schnittpunkte: $f \cap g = A(-9|-22)$, $g \cap h = B(3|2)$ und $h \cap f = C(-\frac{3}{11}|\frac{46}{11})$,
Schnittwinkel: $\alpha = 8{,}13°$, $\beta = 82{,}87°$ und $\gamma = 74{,}74°$

b) Schnittpunkte: $f \cap g = P(\frac{6}{11}|-\frac{12}{22})$, $g \cap h = P(-\frac{14}{9}|-\frac{28}{9})$, $h \cap f = P(-4|-\frac{9}{2})$
Schnittwinkel: $\alpha = 79{,}69°$, $\beta = 77{,}47$ und $\gamma = 22{,}83°$

Aufgabe 4: Länge und Mittelpunkt einer Strecke

a) $|PQ| = \sqrt{13}$ LE und $M(3{,}5|2)$

b) $|PQ| = \sqrt{13}$ LE und $M(2|2{,}5)$

c) $|PQ| = \sqrt{29}$ LE und $M(0|-0{,}5)$

d) siehe Satz

Aufgabe 5: Abstand Punkt-Gerade

a) $F(3|2)$ und $d = \sqrt{10}$ LE

b) $F(1|1)$ und $d = 2{,}5$ LE

c) $F(1|1)$ und $d = 10$ LE

d) $F(0|5)$ und $d = 5$ LE

Aufgabe 6: Abstand Gerade-Gerade

a) z.B. mit $P(0|\frac{10}{4}) \Rightarrow F(\frac{6}{5}|\frac{41}{10}) \Rightarrow d = 2$ LE

b) z.B. mit $P(0|3) \Rightarrow F(\frac{120}{289}|\frac{803}{289}) \Rightarrow d = \frac{8}{17}$ LE

Aufgabe 7: Dreiecksflächen

a) z.B. $g_{AB}(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{17}{7} \Rightarrow F(\frac{129}{29}|\frac{19}{29}) \Rightarrow h = |FC| = \sqrt{\frac{648}{29}}$ und $g = |AB| = \sqrt{58} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = 18$ FE

b) z.B. $g_{AB}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow F(\frac{21}{5}|\frac{28}{5}) \Rightarrow h = |FC| = \sqrt{20}\cdot\frac{3}{5}$ und $g = |AB| = \sqrt{20} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = 6$ FE

Aufgabe 8: Vektoren in der Ebene

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $2\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ und $-\frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix}0{,}5\\-1\end{pmatrix}$

b) Z.B. $\overrightarrow{n_{a1}} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{a2}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_{b1}} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{a2}} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 9: Parameterform der Geradengleichung

a) $g(x) = -2x + 3$

b) Z.B. f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $f(x) = -2x + 1$

c) Z.B. h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

d) Lotgerade zu g durch P ist $n(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ mit Lotfußpunkt $L(-\frac{3}{5} \mid \frac{21}{5}) \Rightarrow d = \overline{PL} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79$ LE.

Aufgabe 10: Abstände und Winkel mit Parameterformen

a) g_{AB}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $g_{AB}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

g_{BC}: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $g_{BC}(x) = 2x$

g_{AC}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $g_{AC}(x) = x + 2$

b) $\alpha \approx 18{,}43°$, $\beta \approx 143{,}13°$ und $\gamma \approx 18{,}43°$ (gleichschenkliges Dreieck)

c) Lotgerade zu g_{AB} durch C: $n_{AB}(x) = -2x + 8$ mit Lotfußpunkt $L_C(\frac{13}{5} \mid \frac{14}{5}) \Rightarrow h_{AB} = \overline{CL_C} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1{,}34$ LE

Lotgerade zu g_{BC} durch A: $n_{BC}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ mit Lotfußpunkt $L_A(\frac{1}{5} \mid \frac{2}{5}) \Rightarrow h_{BC} = \overline{AL_A} = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1{,}34$ LE

Lotgerade zu g_{AC} durch B: $n_{AC}(x) = -x + 3$ mit Lotfußpunkt $L_B(\frac{1}{2} \mid \frac{5}{2}) \Rightarrow h_{AC} = \overline{BL_B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ LE