7.1. Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: Vektoren in der Ebene

a) Zeichne die folgenden Vektoren als Ortsvektoren in eine passende Koordinatenebene (x_1-x_2-Ebene, x_1-x_3-Ebene oder x_2-x_3-Ebene) des kartesischen Koordinatensystems.

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_5$, $\vec{a}_6$, $\vec{a}_7$ und $\vec{a}_8$ an, die die Figur aus a) zu einem **Quadrat** vervollständigen.

c) Berechne die **Länge** der Vektoren $\vec{a}_1$ - $\vec{a}_8$.

d) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_1$', $\vec{a}_3$', $\vec{a}_5$' und $\vec{a}_7$' an, die auf dem **Umkreis** des Quadrates aus b) liegen.

e) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_2$'', $\vec{a}_4$''; $\vec{a}_6$'' und $\vec{a}_8$'' an, die auf dem **Inkreis** des Quadrates aus b) liegen

f) Gib acht Vektoren $\vec{a}_1$,... , $\vec{a}_8$ an, die auf einem entsprechenden Kreis in der x_1-x_3-Ebene liegen.

Aufgabe 2: Vektoren im Raum

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zeichne die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabe 3: Vektoren im Raum

a) Zeichne die folgenden Vektoren als Ortsvektoren in ein kartesisches Koordinatensystem:

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_5$, $\vec{a}_6$, $\vec{a}_7$ und $\vec{a}_8$ an, die die Figur aus a) zu einem **Rechteck** vervollständigen.

c) Berechne die **Länge** der Vektoren $\vec{a}_1$ - $\vec{a}_8$.

d) Gib vier geeignete Vektoren $\vec{a}_1$', $\vec{a}_3$', $\vec{a}_5$' und $\vec{a}_7$' an, die auf dem **Umkreis** des Rechteckes aus b) liegen.

e) Gib sechs geeignete Vektoren $\vec{a}_2$'', $\vec{a}_3$'', $\vec{a}_4$''; $\vec{a}_6$'', $\vec{a}_7$'' und $\vec{a}_8$'' an, die auf dem **Inkreis** des Rechteckes aus b) liegen

f) Gib acht Vektoren $\vec{b}_1$,..., $\vec{b}_8$ an, die ein Rechteck beschreiben, das **senkrecht** auf dem Rechteck aus a) steht. Wähle dabei $\vec{b}_1 = \vec{a}_1$. Wieviele Lösungen gibt es noch?

Aufgabe 4: Spiegelungen in der Ebene

Gegeben sind die Punkte A(1|2|0), B(2|−1|0) und C(3|1|0)

a) Zeichne das Viereck OABC in ein Koordinatensystem.

b) Begründe anhand der Ortvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$, dass das Viereck ein Parallelogramm sein muss.

c) Begründe anhand der Ortvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$, dass das Viereck rechtwinklig sein muss.

d) Spiegele die Figur OABC an der x_1-x_3-Ebene und gib die Koordinaten der entsprechenden Punkte A', B' und C' an

e) Spiegele die Figur aus OABC an der x_2-x_3-Ebene und gib die Koordinaten der entsprechenden Vektoren A'', B'' und C'' an.

f) Welche geometrische Abbildung führt direkt von der Figur OABC zu Figur O''A''B''C''?

Aufgabe 5: Spiegelungen im Raum

Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$. Gib die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}_{12}$, $\vec{a}_{23}$, $\vec{a}_{13}$ und $\vec{a}_0$ an, die man durch Spiegelung von a an der x_1-x_2-, x_2-x_3- und x_1-x_3-Ebene und am Koordinatenursprung erhält.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. mit a_1, a_2 und $a_3 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6: Linearkombinationen

Bestimme alle möglichen Faktoren, r, s und t $\in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind und zeichne die Vektoren in ein Koordinatensystem.

a) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$

b) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$

c) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

d) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

e) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

f) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

g) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

h) $r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Untersuche die folgenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf lineare Unabhängigkeit. Bestimme gegebenenfalls alle Zahlen u $\in \mathbb{R}$, für die dies der Fall ist. Drücke im Fall der linearen Abhängigkeit den Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_u = \begin{pmatrix}8\\u\\1\end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_u = \begin{pmatrix}1\\0\\u\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_u = \begin{pmatrix}0\\u\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{a}_u = \begin{pmatrix}1\\2u\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_u = \begin{pmatrix}2\\2u\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_u = \begin{pmatrix}1\\1\\0,5u\end{pmatrix}$.

7.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: Vektoren in der Ebene

a) Zeichnung ist klar

b) $\vec{a}_5 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = -\vec{a}_1$, $\vec{a}_6 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -\vec{a}_2$, $\vec{a}_7 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\vec{a}_3$, $\vec{a}_8 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\vec{a}_4$

c) $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_5| = |\vec{a}_7| = 1$ LE und $|\vec{a}_2| = |\vec{a}_4| = |\vec{a}_6| = |\vec{a}_8| = \sqrt{2}$ LE

d) $\vec{a}_1' = \sqrt{2}\,\vec{a}_1$, $\vec{a}_3' = \sqrt{2}\,\vec{a}_3$ $\vec{a}_5' = \sqrt{2}\,\vec{a}_5$, und $\vec{a}_7' = \sqrt{2}\,\vec{a}_7$.

e) $\vec{a}_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_2$, $\vec{a}_4'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_4$, $\vec{a}_6'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_6$, und $\vec{a}_8'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}_8$.

f) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_5 = -\vec{b}_1$, $\vec{b}_6 = -\vec{b}_2$, $\vec{b}_7 = -\vec{b}_3$, und $\vec{b}_8 = -\vec{b}_4$.

Aufgabe 2: Vektoren im Raum

vgl. Skript

Aufgabe 3: Vektoren im Raum

a) Zeichnung ist klar

b) $\vec{a}_5 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -\vec{a}_1$, $\vec{a}_6 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = -\vec{a}_2$, $\vec{a}_7 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -\vec{a}_3$, $\vec{a}_8 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = -\vec{a}_4$

c) $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_5| = 1$ LE, $|\vec{a}_2| = |\vec{a}_4| = |\vec{a}_6| = |\vec{a}_8| = \sqrt{3}$ LE und $|\vec{a}_3| = |\vec{a}_7| = \sqrt{2}$ LE

d) $\vec{a}_1' = \sqrt{3}\,\vec{a}_1$, $\vec{a}_3' = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{a}_3$ $\vec{a}_5' = \sqrt{3}\,\vec{a}_5$, und $\vec{a}_7' = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{a}_7$.

e) $\vec{a}_2'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}_2$, $\vec{a}_3'' = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{a}_3$, $\vec{a}_4'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}_4$, $\vec{a}_6'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}_6$, $\vec{a}_7'' = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{a}_7$ und $\vec{a}_8'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}_8$.

f) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_5 = -\vec{b}_1$, $\vec{b}_6 = -\vec{b}_2$, $\vec{b}_7 = -\vec{b}_3$, und $\vec{b}_8 = -\vec{b}_4$. Man könnte auch z.B. bei $\vec{a}_3$ beginnen und ein Rechteck in der x_1-x_3-Ebene beschreiben, das senkrecht zu den beiden anderen Rechtecken steht.

Aufgabe 4: Spiegelungen in der Ebene

a) Die Zeichnung ergibt ein Rechteck

b) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander, da ihre Komponenten im entgegen gesetzten Verhältnis zueinander stehen.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$

d) $A'(1|-2|0)$, $B'(2|1|0)$ und $C'(3|-1|0)$

e) $A''(-1|2|0)$, $B''(-2|-1|0)$ und $C''(-3|1|0)$

f) Punktspiegelung am Ursprung

Aufgabe 5: Spiegelungen im Raum

$\vec{a}_{12} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\-a_3\end{pmatrix}$ $\vec{a}_{23} = \begin{pmatrix}a_1\\-a_2\\a_3\end{pmatrix}$ $\vec{a}_{13} = \begin{pmatrix}-a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_0 = -\vec{a}$.

Aufgabe 6: Linearkombinationen

a) L = {−2} ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen auf einer Geraden)

b) L = {} ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen nicht auf einer Geraden)

c) $L = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, s \in R\right\}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen auf einer Geraden)

d) L = {} ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen auf einer Geraden, die $\vec{c}$ nicht enthält)

e) $L = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\}$ ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen nicht auf einer Geraden aber in einer Ebene, die $\vec{c}$ enthält)

f) L = {} ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen auf einer Ebene, die $\vec{c}$ nicht enthält)

g) $L = \left\{\begin{pmatrix}-1/3\\ 4/3\\ 3\end{pmatrix}\right\}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen nicht in einer Ebene)

h) L = {} ($\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Eben, die $\vec{d}$ nicht enthält)

Aufgabe 7: Lineare Unabhängigkeit

a) $0 = -3t\vec{a} - 7t\vec{b} + t\vec{c}$ und $\vec{c} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$

b) $0 = -3t\vec{a} + 2t\vec{b} + t\vec{c}$ und $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

c) Ansatz $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 8 & 0\\3 & 2 & u & 0\\2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 8 & 0\\0 & 1 & 15 & 0\\0 & 0 & u-9 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow 0 = 7t\vec{a} - 15t\vec{b} + t\vec{c}_9$ und $\vec{c}_9 = -7\vec{a}$ $+ 15\vec{b}$ für u = 9 sowie lineare Unabhängigkeit für $u \neq 9$

d) Ansatz $r\vec{a} + s\vec{b}_u + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & u & 0\\1 & u & 1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & u-1 & 0\\0 & 0 & u^2-u+2 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow$ lineare Unabhängigkeit für alle $u \in \mathbb{R}$

e) Ansatz $r\vec{a}_u + s\vec{b}_u + t\vec{c}_u = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\2u & 2u & 1 & 0\\0 & 1 & 0,5u & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 0,5u & 0\\0 & 0 & u^2-2u+1 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow 0 = 3t\vec{a}_1 - 2t\vec{b}_1 + t\vec{c}_1$ und $\vec{c}_1 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{b}_1$ für u = 1 sowie lineare Unabhängigkeit für $u \neq 1$