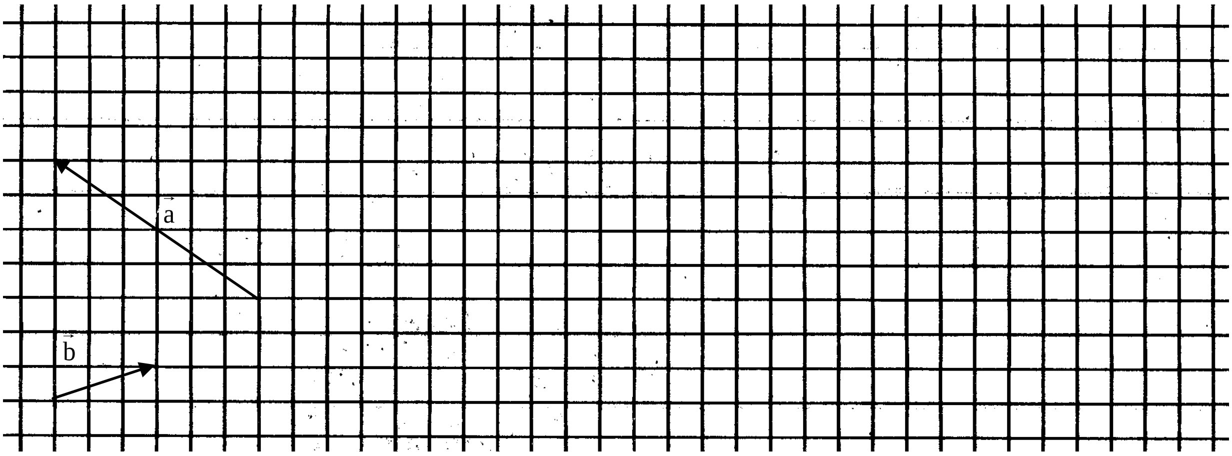
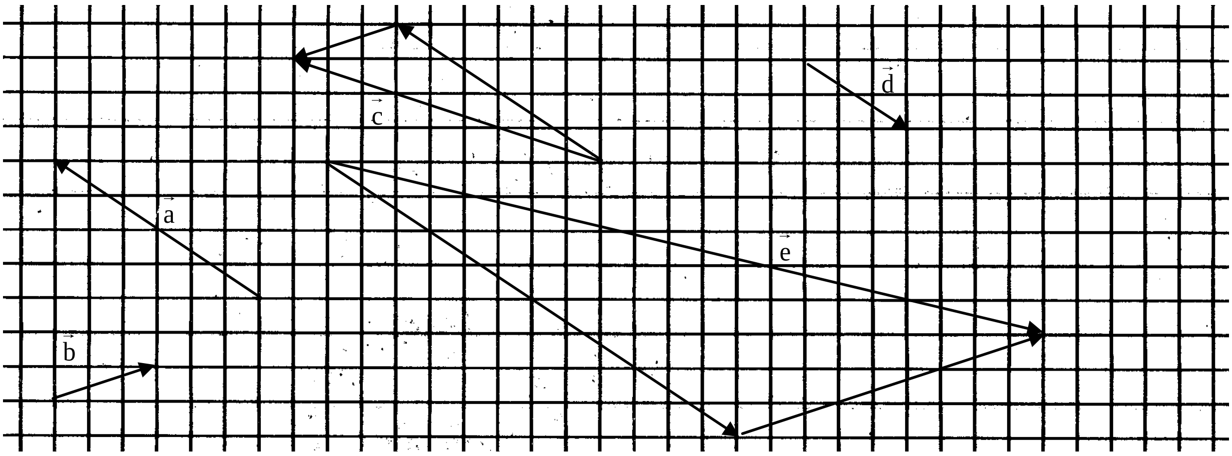
7.1. Prüfungsaufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: Vektoren im Anschauungsraum (4)

Zeichne neben die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = -0{,}5\,\vec{a}$ und $\vec{e} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$:

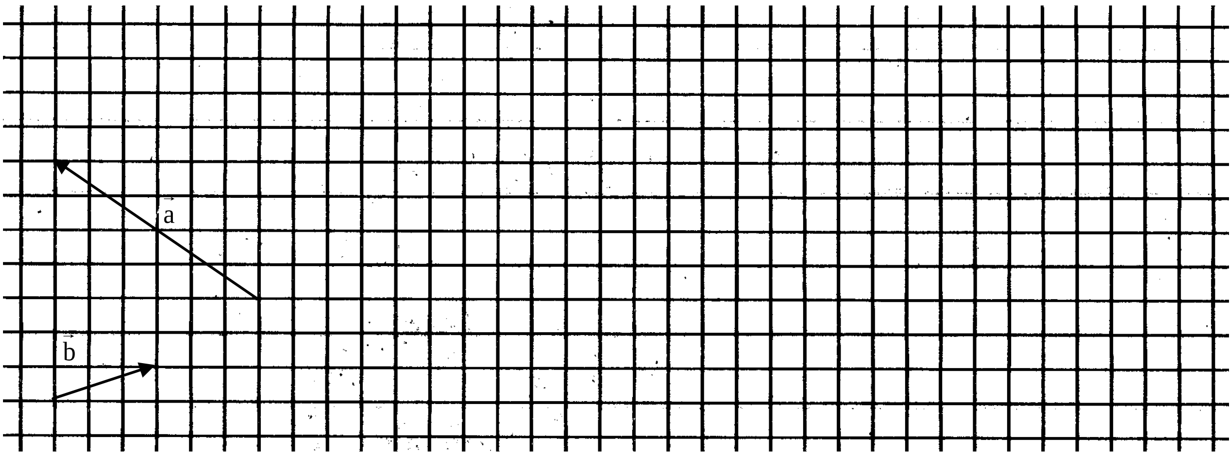


Lösung

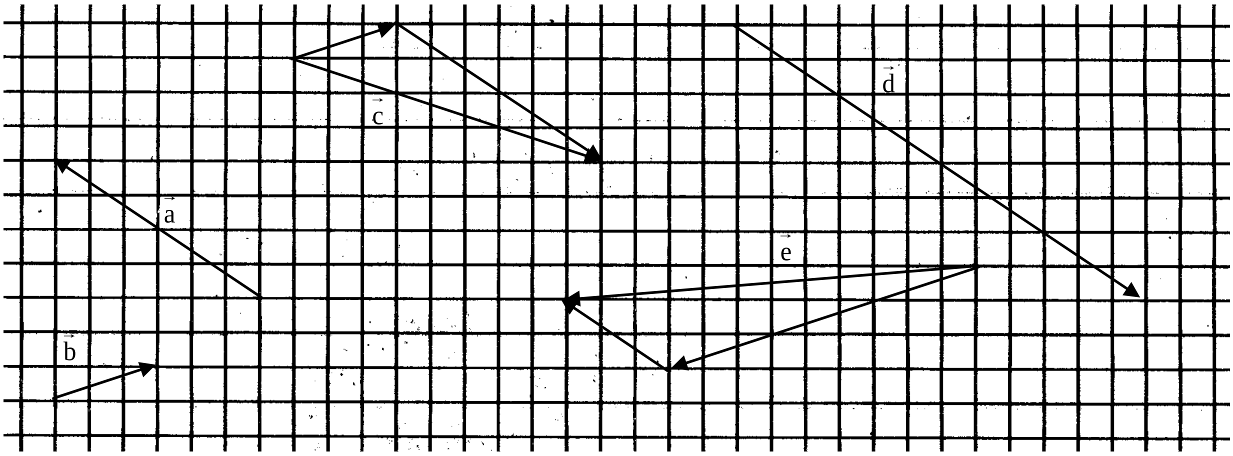


Aufgabe 2: Vektoren im Anschauungsraum (4)

Zeichne neben die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Vektoren $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{d} = -2\,\vec{a}$ und $\vec{e} = 0{,}5\vec{a} - 3\vec{b}$:



Lösung



Aufgabe 3: Vektoren (4)

a) Gegeben sind die Punkte A(1|0|−1), B(1|1|−2) und C(0|2|−2). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. (2)

b) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D' an, die durch Spiegelung von ABCD an der x_1-x_3-Ebene entstehen. (2)

Lösung

a) D(0|3|−3) oder D(2|−1|−1) oder D(0|1|−1) (2)

b) A'(1|0|−1), B'(1|−1|−2), C'(0|−2|−2) und D'(0|−3|−3) oder D'(2|1|−1) oder D'(0|−1|−1) (2)

Aufgabe 4: Vektoren (4)

a) Gegeben sind die Punkte A(2|0|−2), B(2|2|−4) und C(0|4|−4). Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. (2)

b) Geben Sie die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D' an, die durch Spiegelung von ABCD an der x_1-x_2-Ebene entstehen. (2)

Lösung

a) D(0|6|−6) oder D(4|−2|−2) oder D(0|2|−2) (2)

b) A'(2|0|2), B'(2|2|4), C'(0|4|4) und D'(0|6|6) oder D'(4|−2|2) oder D'(0|2|2) (2)

Aufgabe 5: Vektoren (6)

Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC mit A(2|2|−3), B(−2|−6|1) und C(1|−1|2) gleichschenklig oder gleichseitig ist. Bestimmen Sie seinen Umfang und seinen Flächeninhalt.

Lösung:

$\overline{AB} = 4\sqrt{6}$ LE und $\overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{35}$ LE ⇒ ABC ist gleichschenklig aber nicht gleichseitig. (2)

Der Umfang ist $u = 8\sqrt{6} + \sqrt{35}$ LE. (1)

Der Mittelpunkt der Basis AB ist M(0|2|−1) und die Höhe ist $\overline{MC} = \sqrt{19}$ LE. (2)

Der Flächeninhalt ergibt sich damit zu $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{MC} = 2 \cdot \sqrt{114}$ FE. (1)

Aufgabe 6: Vektoren (8)

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{12} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{b}$ mit der Länge $\sqrt{5}$, der im Winkel 30° zu $\vec{a}$ geneigt ist und in der x-y-Ebene liegt. (4)

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{c}$ mit der Länge $2\sqrt{5}$, der sowohl senkrecht zu $\vec{a}$ als auch senkrecht zu $\vec{b}$ steht. (2)

c) Berechnen Sie das Volumen der von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Pyramide. (2)

Lösungen:

a) Für $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ muss gelten: $b_z = 0$; $b_x^2 + b_y^2 = 5$ und $\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \cos(30°) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot b_x + \sqrt{12} \cdot b_y}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (2)

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\, b_x + \sqrt{12}\, b_y = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow b_x + 2b_y = 5.$ (1)

Einsetzen ergibt $(5 - 2b_y)^2 + b_y^2 = 5 \Leftrightarrow 5b_y^2 - 20b_y + 20 = 0 \Rightarrow b_y = 2$ und $b_x = 1 \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

b) $\vec{c} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{12} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder mit Skalarprodukt (2)

c) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(30°) \cdot |\vec{c}| = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{5}{3}\sqrt{5}$ VE (2)

Aufgabe 7a: Lineare Unabhängigkeit (4)

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Lösung:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig. (4)

Aufgabe 7b: Lineare Unabhängigkeit (4)

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Lösung:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig. (4)