7.2. Prüfungsaufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: Parameterform der Geradengleichung (3)
Geben Sie eine Parameterform für die Gerade g an, die

a) durch die Punkte P(1|2|3) und Q(2|1|3) läuft (2)

b) parallel zur Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ durch den Punkt P(1|2|3) läuft (1)

Lösung

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 2: Parameterform der Geradengleichung (3)
Geben Sie eine Parameterform für die Gerade g an, die

a) durch die Punkte P(3|2|1) und Q(1|2|3) läuft (2)

b) parallel zur Geraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ durch den Punkt P(3|2|1) läuft (1)

Lösung

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2)

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 3: Punktprobe (7)
Eine gleichseitige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und eine Höhe von 5 LE. Die Grundfläche liegt so in der x_1-x_2-Ebene, dass eine Ecke im Ursprung O(0|0|0) und die andere im Punkt E(4|4|0) ist. Im Punkt P(3,6|−0,6|1) steht ein Scheinwerfer, der parallel zum Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ausgerichtet wird. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Pyramide mit dem Lichtstrahl. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Lichtstrahl die Pyramidenspitze Q trifft.

Lösung:

Lichtstrahl g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $S_{12}(4{,}2 \mid -1{,}2 \mid 0)$, $S_{23}(0 \mid 3 \mid 7)$ und $S_{13}(3 \mid 0 \mid 2)$ (3)

Zeichnung (2)

$\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 2{,}6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist für kein r erfüllt ⇒ P wird nicht getroffen. (2)

Aufgabe 4: Punktprobe (7)
Eine gleichseitige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche und eine Höhe von 5 LE. Die Grundfläche liegt so in der x_1-x_2-Ebene, dass eine Ecke im Ursprung O(0|0|0) und die andere im Punkt E(4|−4|0) ist. Im Punkt P(3,6|0,6|1) steht ein Scheinwerfer, der parallel zum Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ausgerichtet wird. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den Koordinatenebenen und zeichnen Sie die Pyramide mit dem Lichtstrahl. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Lichtstrahl die Pyramidenspitze Q trifft.

Lösung:
Lichtstrahl g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $S_{12}(4{,}2 \mid 1{,}2 \mid 0)$, $S_{23}(0 \mid -3 \mid 7)$ und $S_{13}(3 \mid 0 \mid 2)$ (3)

Zeichnung (2)

$\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ -2{,}6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist für kein r erfüllt $\Rightarrow$ P wird nicht getroffen. (2)

Aufgabe 5:Schnittpunkte von Geraden in der Ebene
Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Untersuchen Sie die Geraden g und h auf ihre gegenseitige Lage und geben sie die Ortsvektoren aller gemeinsamen Punkte an.

a) g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ und h: $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{b} - \vec{a})$
b) g: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - 0{,}5\vec{a})$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + t(2\vec{b} + \vec{a})$
c) g: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + t(2\vec{a} + \vec{b})$ und h: $\vec{x} = 2\vec{a} + t(2\vec{b} - \vec{a})$
d) g: $\vec{x} = \frac{3}{5}\vec{b} + \vec{a} + t(2\vec{a} - \vec{b})$ und h: $\vec{x} = -2\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$

Lösung
a) $\vec{a} + 2\vec{b}$
b) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$
c) $\frac{11}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$
d) $-\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{7}{5}\vec{b}$

Aufgabe 6: Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen (5)
Beschreibe Sie, welche unterschiedlichen Lagen zwei verschiedene Geraden g und h im Raum zueinander haben können. Erläutern Sie die einzelnen Fälle jeweils durch selbst gewählte Beispiele.

Lösung
siehe Heft