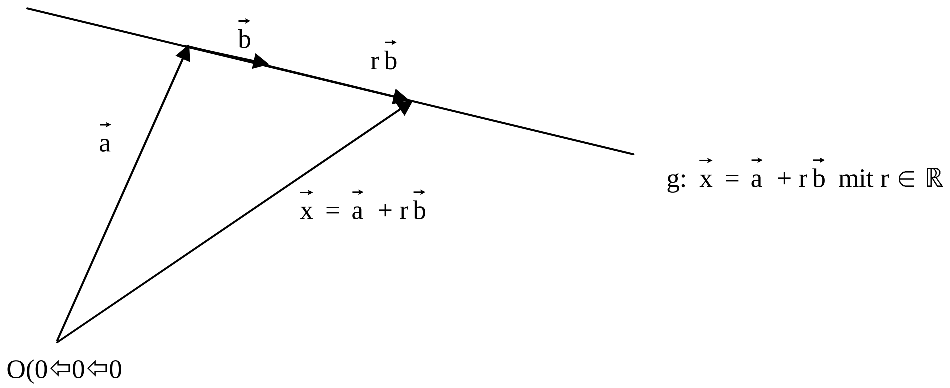
7.2. Geraden

7.2.1. Parameterform der Geradengleichung

Aufgaben zur Geraden Nr. 1 und 2

Definition:

Eine Geradendarstellung in der Form g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$ heißt **Parameterform** der Geradengleichung mit dem **Stützvektor** $\vec{a}$, dem **Richtungsvektor** $\vec{b}$ und dem **Parameter** r.

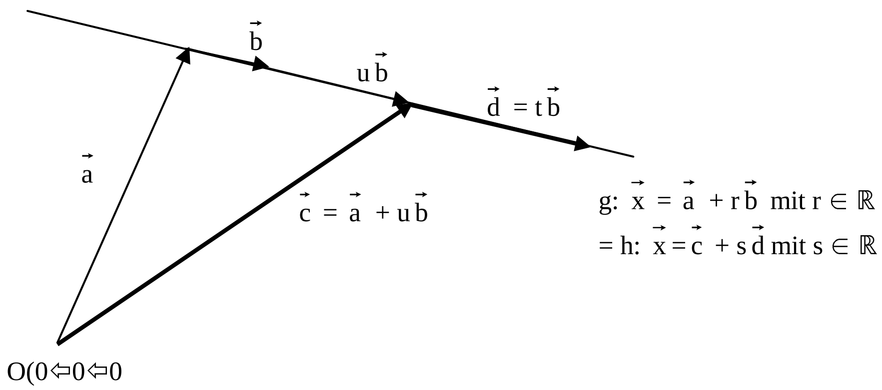


Satz: (Auswechseln von Richtungs- und Stützvektoren)

Seien g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ und h: $\vec{x} = \vec{c} + s\vec{d}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ zwei Geraden. Dann gilt g = h falls es

ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{d} = t\vec{b}$, d.h. der **neue Richtungsvektor** $\vec{d}$ **ist parallel zu** $\vec{b}$

ein $u \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{c} = \vec{a} + u\vec{b}$, d.h. der **neue Stützvektor** $\vec{c}$ **liegt ebenfalls auf g**.



Beweis:

Jedes $\vec{x} \in h$ liegt auf g, denn $\vec{x} = \vec{c} + s\vec{d} = \vec{a} + u\vec{b} + st\vec{b} = \vec{a} + (u + st)\vec{b} = \vec{a} + r\vec{b}$ mit $r = u + st$

Jedes $\vec{x} \in g$ liegt auf h, denn $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} - \frac{u}{t}\vec{d} + \frac{r}{t}\vec{d} = \vec{c} + (\frac{r}{t} - \frac{u}{t})\vec{d} = \vec{c} + s\vec{d}$ mit $s = \frac{r}{t} - \frac{u}{t}$.

Übungen: Aufgaben zur Geraden Nr. 3 und 4

7.2.2. Geraden zu vorgegebenen Punkten und Richtungen

Aufgaben zur Geraden Nr. 5 und 6

Satz: **Geraden zu vorgegebenen Punkten und Richtungen**

- Die Gerade g, die parallel zum Vektor $\vec{a}$ durch den Punkt P verläuft, hat die Gleichung g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\vec{a}$
- Die Gerade g, die durch die Punkte P und Q verläuft, hat die Gleichung g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ}$

Übungen: Aufgaben zur Geraden Nr. 7

7.2.3. Lagebeziehungen zwischen Geraden

Aufgaben zur Geraden Nr. 7

Satz: **Lagebeziehungen zwischen Geraden**

Die beiden Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ und h: $\vec{x} = \vec{c} + s\vec{d}$ haben

- **keinen** gemeinsamen Punkt, wenn die Gleichung $\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d}$ **keine** Lösung besitzt.

  Sie verlaufen dann **parallel** wenn die Gleichung $\vec{b} = t\vec{d}$ **eine** Lösung besitzt.

  windschief, wenn die Gleichung $\vec{b} = t\vec{d}$ **keine** Lösung besitzt
- einen **Schnittpunkt** P, wenn die Gleichung $\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d}$ **eine** Lösung (r|s) besitzt. Seine Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen von r bzw. s in die Gleichung von g_1 bzw. g_2.
- eine **gemeinsame Gerade** $g_1 = g_2$, wenn die Gleichung $\vec{a} + r\vec{b} = \vec{c} + s\vec{d}$ **viele** Lösungen (r|s) besitzt. Die Geraden sind dann **identisch**.

Übungen: Aufgaben zur Geraden Nr. 7 - 11