7.3. Aufgaben zu Ebenen

Aufgabe 1: Ebene durch den Ursprung in Parameterform

Gegeben sind die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie **geometrisch** anhand einer **Zeichnung** und **rechnerisch** mit dem **Gauß-Verfahren** die Faktoren r und s, so dass $\vec{x} = r\vec{b} + s\vec{c}$.

b) Begründen Sie **geometrisch,** warum die Gleichung $\vec{x} = r\vec{b} + s\vec{c}$ genau eine Lösung hat. Verwenden Sie den Satz, dass ein Dreieck durch eine Seite und zwei beliebige andere Größen (Seiten oder Winkel) eindeutig bestimmt ist.

c) Begründen Sie **rechnerisch**, warum die Gleichung $\vec{x} = r\vec{b} + s\vec{c}$ genau eine Lösung hat. Verwenden Sie das **Rangkriterium** und die **Dimensionsformel** für die Lösungsmenge eines LGS.

d) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene E an, die sich durch den Ursprung in Richtung der beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erstreckt.

Aufgabe 2: verschobene Ebene in Parameterform

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Faktoren r und s ∈ ℝ, für die die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ erfüllt ist

b) Erklären Sie **geometrisch** mit Hilfe einer **Zeichnung**, warum die Gleichung $\vec{y} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ keine Lösung haben kann.

c) Erklären Sie **rechnerisch** mit Hilfe des **Rangkriteriums**, warum die Gleichung $\vec{y} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ keine Lösung haben kann. Formen Sie die Gleichung dazu so um, dass sie dem Problem in Aufgabe 1 c) entspricht.

d) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene E an, die sich durch den Punkt P(0|0|1) in Richtung der beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erstreckt..

Aufgabe 3: Punktprobe

Überprüfe, ob die Punkte P und Q in E liegen.

a) P(1|−1|1), Q(1|1|1), E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$

b) P(2|2|0), Q(3|2|0), E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

c) P(2|−3|0), Q(3|3|0), E_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

d) P(0|2|1), Q(0|2|−1), E_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Achsenschnittpunkte

Gegeben sind die Ebenen E_1 - E_4 aus Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebenen mit den Koordinatenachsen und zeichnen Sie den entsprechenden Ausschnitt in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 5: Ersetzen der Stütz- und Spannvektoren
Gegeben sind die Ebenen E_1 - E_4 aus Aufgabe 3. Ersetzen Sie die **Stützvektoren** durch solche, die auf den **Koordinatenachsen** liegen und die **Spannvektoren** durch solche, die in den **Koordinatenebenen** liegen.

Aufgabe 6: Ebenen durch vorgegebene Punkte
Die durch die Koordinatenebenen begrenzten Ausschnitte der Ebenen E_1 - E_4 aus Aufgabe 3 begrenzen eine **Pyramide**. Vervollständigen Sie die Pyramide durch vier weitere Ebenen E_5 - E_8 zu einem **Oktaeder**. Wählen Sie **Stützvektoren**, die auf den **Koordinatenachsen** liegen und **Spannvektoren**, die in den **Koordinatenebenen** liegen.

Aufgabe 7: Ebene durch drei Punkte
Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die durch die Punkte A, B und C verläuft.

a) $A(3|0|3)$, $B(5|1|5)$, $C(7|-1|0)$ b) $A(4|2|1)$, $B(8|2|-2)$, $C(2|5|4)$

Aufgabe 8: Ebene durch zwei Punkte mit einer Richtung
Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die durch die Punkte A und B verläuft und parallel zur Geraden g ist. Überprüfen Sie, ob g in E liegt.

a) $A(2|-1|3)$, $B(-1|2|2)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ b) $A(3|1|-1)$, $B(2|1|0)$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

Aufgabe 9: Ebene durch einen Punkt mit zwei Richtungen
Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die durch den Punkt A verläuft und parallel zu den Geraden g und h ist. Überprüfen Sie, ob g und h in E liegen.

a) $A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$, $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 10: Ebene und Gerade
Untersuchen Sie g und E auf ihre Lage zueinander.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\5\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\8\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\3\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\10\\-7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-8\\13\end{pmatrix}$, $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix}$

Aufgabe 11: Ebene und Ebene
Untersuchen Sie E_1 und E_2 auf ihre Lage zueinander.

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\1\\2\end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-5\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$

d) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-5\\3\end{pmatrix}$

7.3. Lösungen zu den Aufgaben zu Ebenen

Aufgabe 1: Ebene durch den Ursprung in Parameterform

a) $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{c}$

b) **Geometrisch**: In dem Dreieck, dass durch die Linearkombination $\vec{x} = r\vec{b} + s\vec{c}$ gebildet wird, sind alle drei Richtungen bzw. Winkel und die Länge von $\vec{x}$ vorgegeben. Damit sind auch die Längen der beiden anderen Seiten bzw. die Faktoren r und s eindeutig bestimmt.

c) **Rechnerisch**: In dem LGS $r\vec{b} + s\vec{c} = \vec{x}$ ist $\text{Rg}(\vec{b}\ \vec{c}) = \text{Rg}(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{x}) = n = 2$, so dass es eine eindeutige Lösung geben muss.

d) E: $\vec{x} = r\vec{b} + s\vec{c}$

Aufgabe 2: Verschobene Ebene in Parameterform

a) $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

b) **Geometrisch**: $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und damit auch alle Linearkombinationen $r\vec{b} + s\vec{c}$ liegen in der x_1-x_2-Ebene, $\vec{a}$ zeigt senkrecht aus ihr heraus. Die Linearkombinationen $\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ erhält man, indem man zunächst einen Schritt $\vec{a}$ aus der x_1-x_2-Ebene hinaus in Richtung x_3 macht und sich dann mit $r\vec{b} + s\vec{c}$ parallel zur x_1-x_2-Ebene bewegt. Es gibt keine Möglichkeit, wieder in die x_1-x_2-Ebene zurückzukehren. Da aber $\vec{y}$ in der x_1-x_2-Ebene liegt, kann er nicht in der Form $\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$ dargestellt werden.

c) **Rechnerisch**: In dem LGS $\vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c} = \vec{y} \Leftrightarrow r\vec{b} + s\vec{c} = \vec{y} - \vec{a}$ ist $2 = \text{Rg}(\vec{b}\ \vec{c}) < \text{Rg}(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{y} - \vec{a}) = n = 3$, so dass es eine keine Lösung geben kann.

d) E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$

Aufgabe 3: Punktprobe

a) $P \in E_1$ mit $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{c}$ und $Q \notin E_1$

b) $Q \in E_2$ mit $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ und $P \notin E_2$

c) $P \in E_3$ mit $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - 3\vec{c}$ und $Q \notin E_3$

d) $Q \in E_4$ mit $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$ und $P \notin E_4$

Aufgabe 4: Achsenschnittpunkte

a) $S_x(1|0|0)$, $S_x(0|1|0)$, $S_z(0|0|1)$

b) $S_x(1|0|0)$, $S_x(0|-1|0)$, $S_z(0|0|1)$

c) $S_x(-1|0|0)$, $S_x(0|-1|0)$, $S_z(0|0|1)$

d) $S_x(-1|0|0)$, $S_x(0|1|0)$, $S_z(0|0|1)$

Aufgabe 5: Ersetzen der Stütz- und Spannvektoren

a) E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, (oben rechts vorne)

b) E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,(oben rechts hinten)

c) E_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,(oben links hinten)

d) E_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,(oben links vorne)

Aufgabe 6: Ebenen durch vorgegeben Punkte

a) E_5: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, (unten rechts vorne)

b) E_6: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, (unten rechts hinten)

c) E_7: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, (unten links hinten)

d) E_8: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, (unten links vorne)

Aufgabe 7: Ebene durch drei Punkte

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$,

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix}$,

Aufgabe 8: Ebene durch zwei Punkte mit einer Richtung

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$,

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

Aufgabe 9: Ebene durch einen Punkt mit zwei Richtungen

a) g, h $\not\subset$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$,

b) g, h $\not\subset$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

Aufgabe 10: Ebene und Gerade

a) $g \cap E = S(5|6|0)$

b) $g \cap E = S(11|-9|-12)$

c) $g \cap E = \{\}$, aber $g \,||\, E$

d) $g \subset E$

Aufgabe 11: Ebene und Ebene

a) $E_1 \cap E_2 = g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$,

b) $E_1 \cap E_2 = g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$,

c) $E_1 = E_2$

d) $E_1 \cap E_2 = \{\}$ aber $E_1 || E_2$.