7.3. Prüfungsaufgaben zu Ebenen

Aufgabe 1: Parameterform (3)

Gegeben sind die Geraden g und h mit g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-9\\3\\-15\end{pmatrix}$ mit r, s $\in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass g und h parallel, aber nicht identisch sind.
b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in welcher die beiden Geraden liegen.

Lösung

a) g und h sind parallel, da ihre Richtungsvektoren linear abhängig (kollinear) sind: $\begin{pmatrix}-9\\3\\-15\end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$. (1)

Sie sind nicht identisch, da z.B. der Stützpunkt von h nicht auf g liegt: $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ erfordert in den ersten beiden Komponenten r = 0 und in der dritten Komponente r = 0,2 $\Rightarrow$ keine Lösuing! (1)

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (1)

Aufgabe 2: Parameterform, Spurpunkte und Punktprobe (6)

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte A(0|2|3), B(1|−2|6) und C(−4|2|15). (1)
b) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit der x_1-, x_2 und x_3-Achse an. (3)
c) Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ in ein Koordinatensystem (1)
d) Liegt der Punkt D(2|−2|3) in der Ebene E? (1)

Lösung

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix}$ (1)

b) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|6)$ (3)
c) Zeichnung (1)
d) D $\in$ E mit s = 1 und $t = -\frac{1}{4}$. (1)

Aufgabe 3: Parameterform, Spurpunkte und Punktprobe (14)

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A(3|2|0), B(6|−2|1) und C(15|2|−4). (1)
b) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit der x_1-, x_2 und x_3-Achse an. (3)
c) Zeichne das Dreieck $S_1S_2S_3$ in ein Koordinatensystem (1)
d) Liegt der Punkt D(3|−2|2) in der Ebene E? (1)
e) Bestimme den Schnittpunkte S_{12} der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix}$ mit der x_1 - x_2-Ebene und zeichne die Gerade in das Koordinatensystem aus c). (2)
f) Berechne den Schnittpunkt E $\cap$ g und zeichne ihn ebenfalls in das Koordinatensystem aus c) ein. (6)

Lösung

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ (1)

b) $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|2)$ (3)

c) Zeichnung (1)

d) $D \in E$ mit $s = 1$ und $t = -\frac{1}{4}$. (1)

e) $S_{12}(2|\frac{4}{3}|0)$ für $r = \frac{2}{3}$ mit Zeichnung (2)

f) $E \cap g \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\-2\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix}$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & -6 & -3\\0 & -4 & -2 & -2\\-1 & 1 & -5 & -2\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -1\\0 & 2 & 1 & 1\\-1 & 1 & -5 & -2\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -1\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 2 & -7 & -3\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -1\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & 8 & 4\end{array}\right)$ (2)

$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{Eg}(3|1|\frac{1}{2})$. (2)

Aufgabe 4: Parameterform, Spurpunkte und Punktprobe (14)

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte $A(3|0|-2)$, $B(1|-5|2)$ und $C(5-4|3)$. (1)
b) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit der x_1-, x_2 und x_3-Achse an. (3)
c) Zeichne das Dreieck $S_1S_2S_3$ in ein Koordinatensystem (1)
d) Bestimme den Schnittpunkte S_{12} S_{23} und S_{13} der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit den x_1-x_2-, x_2-x_3- und x_1-x_3-Ebenen und zeichne die Gerade in das Koordinatensystem aus c). (3)
e) Berechne den Schnittpunkt $E \cap g$ und zeichne ihn ebenfalls in das Koordinatensystem aus c) ein. (6)

Lösung

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix}$ (1)

b) $S_1(7|0|0)$ mit $s = \frac{10}{9}$ und $t = -\frac{8}{9}$, $S_2(0|-\frac{7}{2}|0)$ mit $s = -\frac{4}{9}$ und $t = \frac{19}{18}$

sowie $S_3(0|0|-\frac{7}{2})$ mit $s = -\frac{5}{6}$ und $t = \frac{2}{3}$ (3)

c) Zeichnung (1)

d) $S_{12}(3|-3|0)$ für $r = -1$, $S_{23}(0|-6|-3)$ für $r = -4$ und $S_{13}(6|0|3)$ für $r = 2$ mit Zeichnung (3)

e) $E \cap g \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow s\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & -1 & 1\\-4 & -5 & -1 & -2\\5 & 4 & -1 & 3\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & -1 & 1\\0 & -9 & -3 & 0\\0 & -18 & -3 & -1\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & -1 & 1\\0 & 3 & 1 & 0\\0 & 0 & 3 & -1\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}9 & 0 & 0 & 4\\0 & 9 & 0 & 1\\0 & 0 & 3 & -1\end{array}\right)$ (2)

$\Rightarrow r = -\frac{1}{3} \Rightarrow S_{Eg}(\frac{11}{3}|-\frac{7}{3}|\frac{2}{3})$. (2)

Aufgabe 5: Parameterform von Gerade und Ebene mit Spurpunkten und gemeinsamen Punkten (9)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0|2|3), B(1|−2|6), C(−4|2|15) und D(2|−2|3) gegeben sowie für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade g_a mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen. (1)
b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E durch A, B und C. (0,5)
c) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit der x_1-, x_2 und x_3-Achse an. (1,5)
d) Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ in ein Koordinatensystem mit 1 LE = 1 cm und Verkürzungsfaktor $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ in x_3-Richtung. (0,5)
e) Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zur Ebene E ? (Lösung: $a = \frac{1}{8}$) (4)
f) Zeichnen Sie diese Gerade ebenfalls in das Koordinatensystem ein. (0,5)
g) Überprüfen Sie, ob g_a sogar in E enthalten ist. (1)

Lösung

a) Die Punkte liegen in einer Eben, da z.B. die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind oder die Punktprobe der Ebene E aus b) für den Punkt D positiv ist. (1)

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|6)$

d) Zeichnung

e) g_a ist parallel zu E, wenn die drei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ koplanar bzw. linear abhängig sind, d.h., wenn $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & a & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & a-2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & a & 0 \\ 0 & -16 & 4a+1 & 0 \\ 0 & 24 & -2a-2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & a & 0 \\ 0 & -16 & 4a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 8a-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{8}. \ (4)$$

f) Zeichnung

g) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow s = 0$ und $t = \frac{1}{4} \Rightarrow g_{1/8}$ liegt sogar in E!

Aufgabe 6: Parameterform von Geraden und Ebenen mit gemeinsamen Punkten (9)

Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ und die Geraden $g_{a:}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) In welchem Punkt schneidet die Gerade g_1 die Eben E? (2)
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene D, die durch die Geraden g_1 und g_{-1} aufgespannt wird. (1)
c) Bestimmen Sie die Gleichung aller gemeinsamen Punkte der Ebenen E und D. (2)
d) Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zur Ebene E ? (4)

Lösung

a) $g_1 = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 4 & 1\\1 & 4 & 0 & 0\\-1 & -3 & -12 & -3\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1/4\end{array}\right)$

$\Rightarrow g_1 \cap E = \{(-1|2|6)\}$ (2)

b) D: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ (1)

c) $E = D \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -1 & 4 & 1\\1 & 1 & 4 & 0 & 0\\-1 & -3 & -3 & -12 & -3\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 6 & 3/2\\0 & 1 & 0 & 14/3 & 7/6\\0 & 0 & 1 & -8/3 & -2/3\end{array}\right) \Rightarrow s = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3}t$

$\Rightarrow g_{ED}: \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\14/3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4/3\\-32/3\\20\end{pmatrix}$. (2)

d) g_a ist parallel zu E, wenn die drei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\1\\a-2\end{pmatrix}$ koplanar bzw. linear abhängig sind, d.h., wenn $s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}a\\1\\a-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & a & 0\\-4 & 0 & 1 & 0\\3 & 12 & a-2 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & a & 0\\0 & -16 & 4a+1 & 0\\0 & 24 & -2a-2 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & a & 0\\0 & -16 & 4a+1 & 0\\0 & 0 & 8a-1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow a = \frac{1}{8}$. (4)

e) $\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\12\end{pmatrix} \Rightarrow s = 0$ und $t = \frac{1}{4} \Rightarrow g_{1/8}$ liegt sogar in E!