

## 7.4. Aufgaben zu Teilverhältnissen

### Aufgabe 1: Schwerpunkte

T sei der Schwerpunkt des Waagebalkens mit den Endpunkten A und B und den dort aufgehängten Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Da T auf der Verbindungslinie AB liegt, gilt  $\vec{AT} = t \cdot \vec{AB}$  bzw.  $\vec{TB} = s \cdot \vec{AB}$  mit geeigneten Faktoren t und s. Berechnen Sie t und s für die angegebenen Masse:

- a)  $m_1 = 2 \text{ kg}$  und  $m_2 = 2 \text{ kg}$       c)  $m_1 = 2 \text{ kg}$  und  $m_2 = 1 \text{ kg}$       e)  $m_1 = 4 \text{ kg}$  und  $m_2 = 12 \text{ kg}$   
 b)  $m_1 = 1 \text{ kg}$  und  $m_2 = 2 \text{ kg}$       d)  $m_1 = 15 \text{ kg}$  und  $m_2 = 3 \text{ kg}$       f)  $m_1$  und  $m_2$  beliebig

### Aufgabe 2. Teilverhältnisse

Der Punkt T liegt auf der Geraden [AB]. Berechnen Sie alle möglichen Teilverhältnisse TV(ATB), TV(BAT), TV(TBA), TV(TAB), TV(BTA) und TV(ABT).

- a) A(1|1|1), T(2|4|5) und B(5|13|17)      c) A(4|4|1), T(-2|-8|1) und B(3|2|1)  
 b) A(-1|0|2), T(7|10|-6) und B(3|5|-2)      d) A, T und B beliebige Punkt mit TV(ATB) = t

### Aufgabe 3: Teilverhältnisse

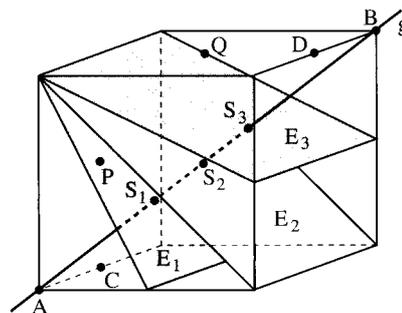
- a) Zeigen Sie, dass A(25|14|11) auf der Geraden durch P(1|-2|3) und Q(55|34|21) liegt.  
 b) Berechnen Sie TV(PAQ)  
 c) Zeigen Sie, dass der Punkt B mit  $\text{TV}(ABQ) = \frac{1}{9}$  die Mitte der Strecke PQ ist.

### Aufgabe 4 (Teilverhältnisse)

Zeigen Sie, dass für jeden Teilpunkt T einer Strecke AB die Beziehung  $\text{TV}(ATB) \cdot \text{TV}(BTA) = 1$  gilt)

### Aufgabe 5: Teilverhältnisse im Würfel

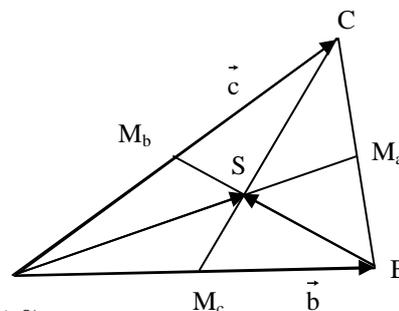
Die Ebenen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  gehen durch Ecken bzw. Kantenmitten des nebenstehenden Würfels mit den Eckpunkten A(2|0|0) und B(0|2|2). Die Punkte C und D sind Kantenmitten. Die Punkte P und Q sind die Mitten der linken bzw. oberen Seitenfläche. Die Strecken AB, CD und PQ schneiden die Ebenen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$ . In welchen Verhältnissen werden diese Strecken von den jeweiligen Schnittpunkten geteilt?



### Aufgabe 6: Schwerpunkt eines Dreiecks

Gegeben ist das nebenstehende Dreieck ABC. Zeigen Sie:

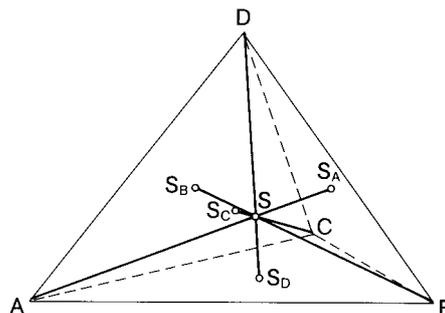
- a) Die Seitenhalbierenden  $[AM_a]$  und  $[BM_b]$  schneiden sich in einem Punkt S mit  $\text{TV}(ASM_A) = \text{TV}(BSM_B) = 2$   
 b) Die Seitenhalbierende  $CM_c$  geht ebenfalls durch S und  $\text{TV}(CSM_C) = 2$   
 c) Legt man den Koordinatenursprung an einen beliebigen Ort O, so gilt  $\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$   
 d) S ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Hinweis:  $A = O(0 \Leftarrow 0 \Leftarrow 0)$ . Verwenden Sie das **Prinzip von Cavalieri**, um zu zeigen, dass der Schwerpunkt S liegt auf **jeder der drei Seitenhalbierenden** liegen muss.



### Aufgabe 7: Schwerpunkt eines Tetraeders

Gegeben ist das nebenstehende Tetraeder ABCD. Zeigen Sie:

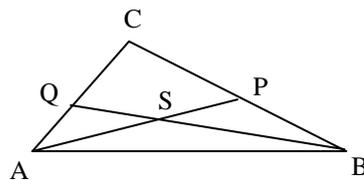
- a) Die Schwerlinien  $AS_a$  und  $BS_b$  schneiden sich im Punkt S mit  $\text{TV}(ASS_A) = \text{TV}(BSS_B) = 3$   
 b) Die Schwerlinien  $CS_c$  und  $DS_d$  gehen ebenfalls durch S und  $\text{TV}(CSS_C) = \text{TV}(DSS_D) = 3$ .  
 c) Legt man den Koordinatenursprung in einen beliebigen Punkt O, so gilt  $\vec{OS} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$



**Aufgabe 8: Teilverhältnisse im Dreieck**

In dem Dreieck ABC ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke AC im Verhältnis  $TV(AQC) = t$ . S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ.

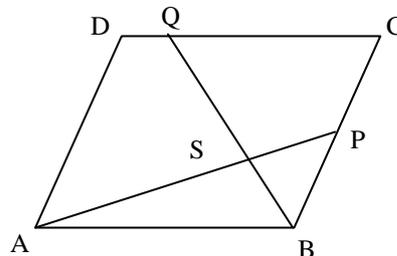
Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) = 2t$  und  $TV(BSQ) = \frac{1+t}{t}$ .



**Aufgabe 9: Teilverhältnisse im Parallelogramm**

In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q der Mittelpunkt der Strecke CD. S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BQ. Zeigen Sie,

dass  $TV(ASP) = 4$  und  $TV(BSQ) = \frac{2}{3}$ .



**Aufgabe 10: Teilverhältnisse im Parallelogramm**

In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke CD im Verhältnis  $TV(CQD) = t$ . S ist der Schnittpunkt der Strecken AP

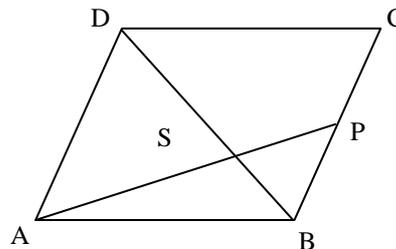
und BQ. Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) = 2 \frac{1+t}{t}$  und

$TV(BSQ) = \frac{1+t}{1+2t}$ .

**Aufgabe 11: Teilverhältnisse im Parallelogramm**

In dem Parallelogramm ABCD teilt P die Strecke BC im Verhältnis  $TV(BPC) = t$ . S ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BD. Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) =$

$\frac{1+t}{t}$  und  $TV(BSD) = \frac{t}{t+1}$ .

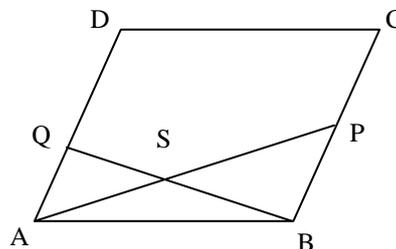


**Aufgabe 12: Teilverhältnisse im Parallelogramm**

In dem Parallelogramm ABCD ist P der Mittelpunkt der Strecke BC und Q teilt die Strecke AD im Verhältnis  $TV(AQD) = t$ . S ist der Schnittpunkt der Strecken AP

und BQ. Zeigen Sie, dass  $TV(ASP) = \frac{2t}{1+t}$  und

$TV(BSQ) = \frac{1+t}{2t}$ .



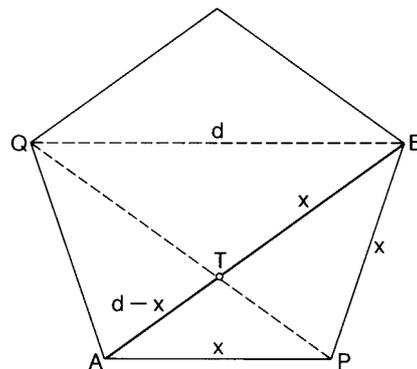
**Aufgabe 13: Goldener Schnitt**

Ein Punkt T teilt die Strecke AB im goldenen Schnitt, wenn  $\overline{AT} : \overline{TB} = \overline{TB} : \overline{AB}$ .

a) Zeigen Sie, dass für den goldenen Schnitt

$$TV(ATB) = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ gilt.}$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck im goldenen Schnitt teilen (Siehe rechts)



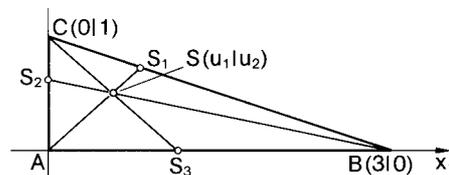
$$d : x = x : (d - x) \quad 107.6$$

**Aufgabe 14: Satz von Ceva**

$S(u_1|u_2)$  ist der Schnittpunkt der Strecken  $AS_1, BS_2$  und  $CS_3$ .

a) Berechnen Sie die Koordinaten von  $S_1, S_2$  und  $S_3$  in Abhängigkeit von  $u_1$  und  $u_2$ .

b) Berechnen Sie  $TV(BS_1C), TV(CS_2A)$  und  $TV(AS_3B)$  und zeigen Sie, dass das Produkt dieser Teilverhältnisse den Wert 1 hat



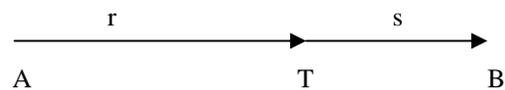
## 7.4. Lösungen zu den Aufgaben zu Teilverhältnissen

### Aufgabe 1: Schwerpunkte

- a)  $t = \frac{1}{2}$  und  $s = \frac{1}{2}$                       d)  $t = \frac{1}{6}$  und  $s = \frac{5}{6}$   
 b)  $t = \frac{2}{3}$  und  $s = \frac{1}{3}$                       e)  $t = \frac{3}{4}$  und  $s = \frac{1}{4}$   
 c)  $t = \frac{1}{3}$  und  $s = \frac{2}{3}$                       f)  $t = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  und  $s = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

### Aufgabe 2: Teilverhältnisse

Teilaufgabe	TV(ATB)	TV(BAT)	TV(TBA)	TV(TAB)	TV(BTA)	TV(ABT)
a)	$\frac{1}{3}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3	$-\frac{4}{3}$
b)	-2	$-\frac{1}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$	1
c)	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{6}$	5	-6	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{5}$
allgemein	$\frac{r}{s} = t$	$\frac{-r-s}{r} = -\frac{1+t}{t}$	$\frac{s}{-r-s} = -\frac{1}{1+t}$	$\frac{-r}{r+s} = -\frac{t}{1+t}$	$\frac{-s}{-r} = \frac{1}{t}$	$\frac{r+s}{-s} = -1-t$



### Aufgabe 3: Teilverhältnisse

a)  $\vec{PA} = \begin{pmatrix} 24 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$  und  $\vec{AQ} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{PA} = \frac{4}{5} \vec{AQ}$

b) Wegen a) gilt  $TV(PAQ) = \frac{4}{5}$

c) Die Mitte M zwischen P und Q erhält man durch den Ortsvektor  $\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{1}{2} \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$ . Wegen

$$TV(ABQ) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \vec{AB} = \frac{1}{9} \vec{BQ} = \frac{1}{10} \vec{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ folgt aber auch } B(28|16|12) = M$$

### Aufgabe 4: Teilverhältnisse

siehe Aufgabe 1

### Aufgabe 5: Teilverhältnisse im Würfel

$$E_1: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, E_2: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } E_3: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

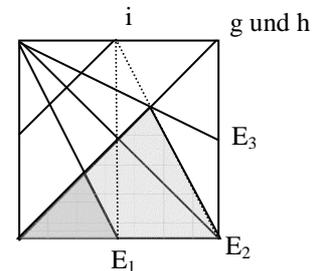
$$g(AB): \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, h(CD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ und } i(PQ): \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$TV(AS_1B) = \frac{1}{2}, TV(AS_2B) = 1 \text{ und } TV(AS_3B) = 2$$

$$TV(CS_1D) = \frac{1}{2}, TV(CS_2D) = 1 \text{ und } TV(CS_3D) = 2$$

$$TV(PS_1Q) = \frac{1}{2}, TV(PS_2Q) = 1 \text{ und } TV(PS_3Q) = 2$$



Da sich die Teilverhältnisse bei der Parallelprojektion nicht ändern, lässt sich die Berechnung durch **Projektion** des Würfels auf die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene vereinfachen. Die Projektion von  $h$  liegt auf der Projektion von  $g$ , während die Projektion von  $i$  parallel verläuft. Aus der **Symmetrie** zu  $E_2$  folgt zunächst  $TV(AS_2B) = 1$ . Aus der Streckung des dunkel schraffierten Dreiecks am Zentrum  $A$  um den Faktor 2 auf das hell schraffierte Dreieck folgt  $TV(AS_1B) = \frac{1}{2}$ . Wieder wegen der Symmetrie zu  $E_2$  folgt  $TV(AS_3B) = 2$ . Aus den **Strahlensätzen** folgt dann, dass  $i$  und  $h$  in den gleichen Verhältnissen geteilt werden wie  $g$ .

### Aufgabe 6: Schwerpunkt eines Dreieckes

siehe Skript

### Aufgabe 7: Schwerpunkt eines Tetraeder

siehe Skript

### Aufgabe 8: Teilverhältnisse im Dreieck

linear unabhängige Vektoren:  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{geschlossener Vektorzug: } \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r \cdot \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + s \cdot (\vec{a} - \frac{t}{1+t} \vec{b}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (s - \frac{1}{2}r - 1) \vec{a} + (\frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t} \cdot s) \vec{b} = 0$$

$$\text{lineare Unabhängigkeit: } \frac{1}{2}r + s - 1 = 0 \text{ und } \frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t} \cdot s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{1+2t} \text{ und } r = \frac{2t}{1+2t}$$

$$\text{Teilverhältnisse: } TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{2t}{1+2t} : \frac{1}{1+2t} = 2t \text{ und } TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{1+2t} : \frac{t}{1+2t} = \frac{1+t}{t}.$$

### Aufgabe 9: Teilverhältnisse im Parallelogramm

siehe Aufgabe 10

### Aufgabe 10: Teilverhältnisse im Parallelogramm

linear unabhängige Vektoren:  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

$$\text{geschlossener Vektorzug: } \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}) - s \cdot (\vec{b} + \frac{1}{1+t} \vec{a} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r - \frac{1}{1+t}) \vec{a} + (s - 1) \vec{b} + (\frac{1}{2}r - s) \vec{b} = 0$$

$$\text{lineare Unabhängigkeit: } r - \frac{1}{1+t} s + s - 1 = 0 \text{ und } \frac{1}{2}r - s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{2+3t} \text{ und } r = \frac{2+2t}{2+3t}$$

$$\text{Teilverhältnisse: } TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{2+2t}{2+3t} : \frac{t}{2+3t} = 2 \frac{1+t}{t} \text{ und } TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{2+3t} : \frac{1+2t}{2+3t} = \frac{1+t}{1+2t}.$$

**Aufgabe 11: Teilverhältnisse im Parallelogramm**linear unabhängige Vektoren:  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ 

geschlossener Vektorzug:  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r(\vec{a} + \frac{t}{1+t}\vec{b}) - s(\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r+s-1)\vec{a} + (\frac{t}{1+t}r - s)\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit:  $r+s-1=0$  und  $\frac{t}{1+t}r - s = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1+t}{1+2t}$  und  $s = \frac{t}{1+2t}$

Teilverhältnisse:  $TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{1+t}{1+2t} : \frac{t}{1+2t} = \frac{1+t}{t}$  und  $TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{t}{1+2t} : \frac{1+t}{1+2t} = \frac{t}{1+t}$ .

**Aufgabe 12: Teilverhältnisse im Parallelogramm**linear unabhängige Vektoren:  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ 

geschlossener Vektorzug:  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow r(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - s(\frac{t}{1+t}\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = 0 \Leftrightarrow (r+s-1)\vec{a} + (\frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t}s)\vec{b} = 0$

lineare Unabhängigkeit:  $r+s-1=0$  und  $\frac{1}{2}r - \frac{t}{1+t}s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{1+3t}$  und  $r = \frac{2t}{1+3t}$

Teilverhältnisse:  $TV(ASP) = \frac{r}{1-r} = \frac{2t}{1+3t} : \frac{1+t}{1+3t} = \frac{2t}{1+t}$  und  $TV(BSQ) = \frac{s}{1-s} = \frac{1+t}{1+3t} : \frac{2t}{1+3t} = \frac{1+t}{2t}$ .

**Aufgabe 13: Goldener Schnitt**

a) Sei  $t = TV(ATB) = \overline{AT} : \overline{TB} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{t}{1+t}\overline{AB}$  und  $\overline{TB} = (1 - \frac{t}{1+t})\overline{AB} = \frac{1}{1+t}\overline{AB}$ . Gegeben ist

$$\overline{AT} : \overline{TB} = \overline{TB} : \overline{AB} \Rightarrow t = \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

b) Die gleichschenkligen Dreiecke APT und BQT sind ähnlich, also gilt  $\overline{AT} : \overline{TB} = d:x = \overline{TB} : \overline{AB}$

**Aufgabe 14: Satz von Ceva**

$$S_1(\frac{3u_1}{u_1+3u_2} | \frac{3u_2}{u_1+3u_2}), S_2(0 | \frac{3u_2}{3-u_1}) \text{ und } S_3(\frac{u_1}{1-u_2} | 0) \Rightarrow TV(BS_1C) = \frac{3u_2}{u_1}, TV(CS_2A) = \frac{3-u_1-3u_2}{3u_2}$$

und  $TV(AS_3B) = \frac{u_1}{3-3u_2-u_1}$ . Das Produkt dieser Teilverhältnisse hat offensichtlich den Wert 1.