7.4. Teilverhältnisse

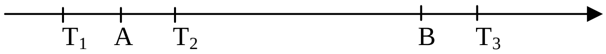
7.4.1. Berechnung von Teilverhältnissen

Aufgaben zu Teilverhältnissen Nr. 1

Die Schwerpunkte von Figuren und Körpern lassen sich mit Hilfe von Teilverhältnissen ausdrücken und berechnen.

Definition
Ist T ein Punkt der Geraden [AB] mit $\overrightarrow{AT} = t\cdot\overrightarrow{TB}$, dann nennt man die Zahl t = TV(ATB) das **Teilverhältnis** der Punkte A, T und B.

Beispiel: A(3|0|0), B(10|0|0), T_1(1|0|0), T_2(5|0|0) und T_3(12|0|0).



$$TV(AT_1B) = \frac{-2}{9} = -\frac{2}{9},\ TV(AT_2B) = \frac{2}{5} \text{ und } TV(AT_3B) = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2}$$

Übung: Berechne TV(T_1AB), TV(T_2AB) und TV(T_3AB)

Satz und Definition
Liegt T auf der Strecke AB, so ist TV(ATB) > 0 und man spricht von einem **inneren** Punkt. Für TV(ATB) < 0 spricht man von einem **äußeren** Punkt.

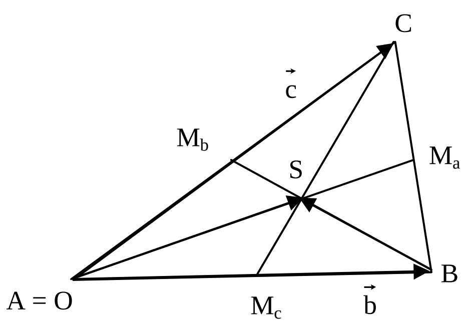
Übungen: Aufgaben zu Teilverhältnissen Nr. 2 - 4

7.4.2. Geometrische Beweise mit Teilverhältnissen

Teilverhältnisse in Figuren und Körpern sind oft **unabhängig von den Koordinaten** der beteiligten Eckpunkte. Man betrachtet daher meistens allgemeine Dreiecke, Vierecke, Pyramiden, u.s.w. und benutzt zur Berechnung der gesuchten Schnittpunkte und Teilverhältnisse die **lineare Unabhängigkeit** von zwei (Ebene) oder drei (Raum) Kantenvektoren.
Da viele **Figuren** aus **Dreiecken** zusammengesetzt sind, lohnt sich die genauere Betrachtung des Schwerpunktes eines Dreieckes.

Satz
1. Die Seitenhalbierenden AM_A, BM_B und CM_C eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkt S.
2. TV(ASM_A) = TV(BSM_B) = TV(CSM_C) = 2.
3. Der Ortsvektor des Schwerpunktes ist $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$
4. S ist der Schwerpunkt des Dreieckes, d.h., es bleibt im Gleichgewicht, wenn es in S aufgehängt wird.

Beweis



1. Schritt: Schnittpunkt zweier Geraden

Die Seitenhalbierenden $[AM_a]$ und $[BM_b]$ schneiden sich in einem Punkt S mit $TV(ASM_A) = TV(BSM_B) = 2$.

Man legt den **Koordinatenursprung** in einen der Eckpunkte, z.B. A = O als und beschreibt die Geraden $[AM_a]$ und $[BM_b]$ durch **zwei linear unabhängige Ortsvektoren** $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$:

$[AM_a]$: $\vec{x} = r\,\overrightarrow{AM_a} = r\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ und

$[BM_b]$: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\overrightarrow{M_bB} = \vec{b} + s(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b})$

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, werden die beiden Geraden **gleichgesetzt**

$r\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} + s(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b})$

Man bringt alle Vektoren auf eine Seite und erhält einen **geschlossenen Vektorzug**.

$r\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b} - s(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}) = 0$

Nun klammert man die linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus und erhält eine **Linearkombination der Null**:

$(\frac{1}{2}r + s - 1)\vec{b} + (\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s)\vec{c} = \vec{0}$

Wegen der **linearen Unabhängigkeit** von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ muss gelten

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}r + s - 1 = 0 \\ \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}s = 0 \end{array} \right|$$

Das LGS hat die eindeutige Lösung $r = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$. Dies bedeutet, dass

1. sich $[AM_a]$ und $[BM_b]$ tatsächlich in einem Punkt S schneiden und
2. $TV(ASM_A) = \frac{r}{1-r} = 2$ und $TV(BSM_B) = \frac{s}{1-s} = 2$.

2. Schritt: Punktprobe

Die Seitenhalbierende CM_c geht ebenfalls durch S und $TV(CSM_C) = 2$.

Gesuchte Vektoren durch linear unabhängige Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ausdrücken:

$\overrightarrow{OS} = t\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ wobei nach Schritt 1. gilt $t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

$[CM_c]$: $\vec{x} = \vec{c} + t\,\overrightarrow{CM_c} = \vec{c} + t(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c})$

Gleichsetzen ⇔ geschlossener Vektorzug

$\vec{c} + t(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow (\frac{1}{2}t - \frac{1}{3})\vec{b} + (\frac{2}{3} - t)\vec{c} = \vec{0}$

Lineare Unabhängigkeit:

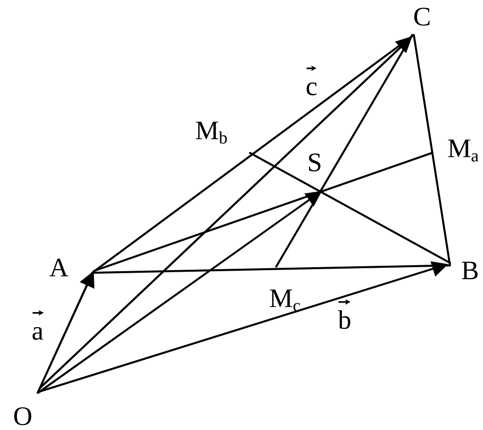
$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}t - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{2}{3} - t = 0. \end{array} \right|$$

Beide Gleichung haben die gleiche eindeutige Lösung $t = \frac{2}{3}$. S liegt also auf $[CM_c]$ und $TV(CSM_C) = 2$

3. Schritt: Verschiebung des Ursprungs

Legt man den Koordinatenursprung an einen beliebigen Ort O, so gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

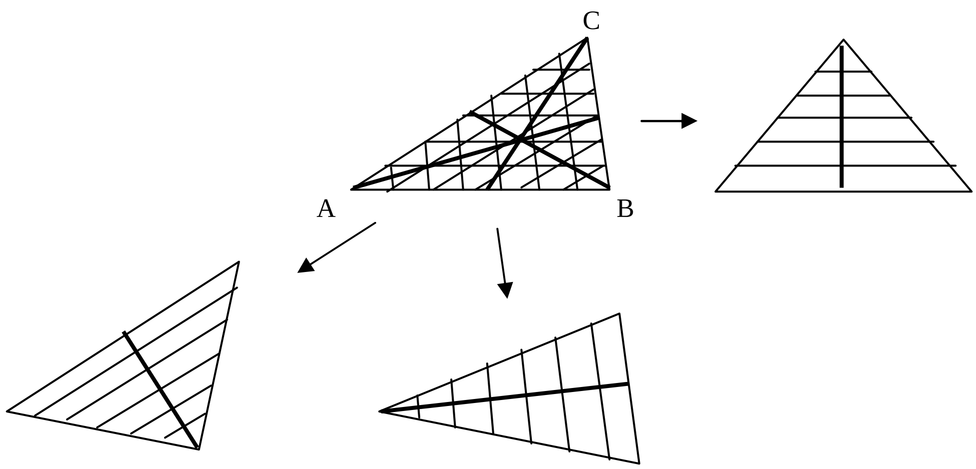
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A}\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}\right)\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\end{aligned}$$



4. Schritt: Prinzip von Cavalieri

S ist der Schwerpunkt des Dreieckes.

Dabei verwenden wir das **Prinzip von Cavalieri**, um zu zeigen, dass der Schwerpunkt auf jeder der drei Seitenhalbierenden liegen muss: Zerschneidet man das Dreieck parallel zu einer Seite in viele Streifen, so werden alle Streifen durch die Seitenhalbierende in der Mitte geteilt. Dies erkennt man durch eine **Parallelverschiebung der Streifen** in ein gleichschenkliges Dreieck. Lagert man das Dreieck auf einem Balken, der genau unter der Seitenhalbierenden liegt, so gleichen sich die Streifenstücke rechts und links aus und das Dreieck bleibt im Gleichgewicht. Der Schwerpunkt muss also irgendwo auf der Seitenhalbierenden liegen. Da sich die drei Seitenhalbierenden in S schneiden, ist S der Schwerpunkt.

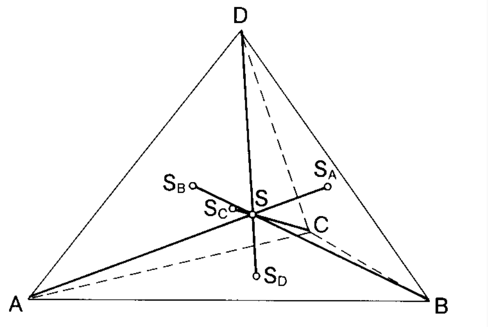


Da viele **Körper** aus **Tetraedern** zusammengesetzt sind, lohnt sich auch die genauere Betrachtung des Schwerpunktes eines Tetraeders.

Satz

1. Die Schwerlinien AS_A, BS_B, CS_C und DS_D eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkt S.
2. $TV(ASS_A) = TV(BSS_B) = TV(CSS_C) = TV(DSS_D) = 3$.
3. Der Ortsvektor des Schwerpunktes ist $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$
4. S ist der Schwerpunkt des Tetraeders, d.h., es bleibt im Gleichgewicht, wenn es in S aufgehängt wird.

Beweis



1. Schritt: Schnittpunkt zweier Geraden

Die Schwerlinien AS_a und BS_b schneiden sich im Punkt S mit $TV(ASS_A) = TV(BSS_B) = 3$.

Man legt den **Koordinatenursprung** in einen der Eckpunkte, z.B. $A = O(0|0|0)$ und beschreibt $[AS_a]$ und $[BS_b]$ durch **drei linear unabhängige Ortsvektoren** $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$:

$[AS_a]$: $\vec{x} = t\,\overrightarrow{AS_a} = t\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ und

$[BS_b]$: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\overrightarrow{BS_b} = \vec{b} + s(\frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d}) - \vec{b})$

Gleichsetzen $\Leftrightarrow$ geschlossener Vektorzug:

$$t\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{b} + s(\frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d}) - \vec{b}) \Rightarrow (\frac{1}{3}t + s - 1)\vec{b} + (\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}s)\vec{c} + (\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}s)\vec{d} = \vec{0}$$

Lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}t + s - 1 = 0 \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}s = 0 \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}s = 0 \end{array} \right|$$

Das LGS hat die eindeutige Lösung $t = \frac{3}{4}$ und $s = \frac{3}{4}$. Dies bedeutet, dass

1. sich $[AS_a] = [BS_b]$ tatsächlich in einem Punkt S schneiden und
2. $TV(ASS_A) = TV(BSS_B) = 3$.

2. Schritt: Punktprobe

Die Schwerlinien CS_c uns DS_D gehen ebenfalls durch S und $TV(CSS_C) = TV(DSS_D) = 3$.

Ausdrücken der gesuchten Vektoren durch linear unabhängige $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$:

$\overrightarrow{OS} = t\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ wobei nach Schritt 1. gilt $t = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$

$[CS_c]$: $\vec{x} = \vec{c} + t\,\overrightarrow{CS_c} = \vec{c} + t(\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d}) - \vec{c})$

$[DS_D]$: $\vec{x} = \vec{d} + t\,\overrightarrow{DS_D} = \vec{d} + s(\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{d})$

Gleichsetzen $\Leftrightarrow$ geschlossener Vektorzug:

$$\vec{c} + t(\frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d}) - \vec{c}) = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \Leftrightarrow (\frac{1}{3}t - \frac{1}{4})\vec{b} + (\frac{3}{4} - t)\vec{c} + (\frac{1}{3}t - \frac{1}{4})\vec{d} = \vec{0}$$

Lineare Unabhängigkeit:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}t - \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{3}{4} - t = 0 \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{4} = 0 \end{array}\right|$$

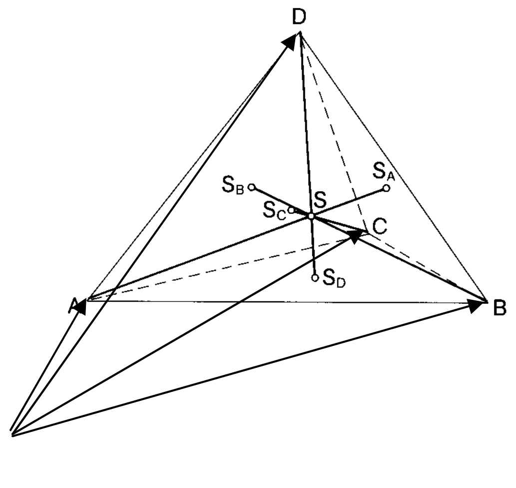
Alle Gleichung haben die gleiche eindeutige Lösung t = $\frac{3}{4}$. S liegt also auf [CS_c] und TV(CSS_C) = 3

[DS_D] = $\overrightarrow{OS}$ führt auf die entsprechenden Aussagen für [DS_D].

3. Schritt: Verschiebung des Ursprungs

Legt man den Koordinatenursprung in einen beliebigen Punkt O, so gilt $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AS_A} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \end{aligned}$$



4. Schritt: Schwerpunkt als Schnittpunkt des Schwerelinien

Der Tetraeder befindet sich im Gleichgewicht. wenn er auf einer Schwerlinie gelagert wird.

Zerschneidet man nämlich den Tetraeder parallel zur gegenüberliegenden Seite in viele Scheiben, so geht die Schwerlinie durch die Schwerpunkte aller Scheiben und die Scheiben bleiben daher in Gleichgewicht. Lagert man den Tetraeder im Schnittpunkt S der vier Schwerlinien, so muss er also wieder im Gleichgewicht blieben. Experimentell lässt sich dies nachprüfen, indem man den Tetraeder an einer beliebigen Ecke oder Kante aufhängt. Er wird sich immer so drehen, dass S genau unter dem Aufhängepunkt liegt, was einer Aufhängung in S selber entspricht.

Vorgehen bei Beweisen zu Teilverhältnissen
1. Ausdrücken der gesuchten Vektoren durch **zwei** (Ebene) bzw. **drei** (Raum) **linear unabhängige Kantenvektoren**
2. Formulierung eines **geschlossenen Vektorzugs** = Linearkombination der Null mit den gesuchten Vektoren
3. Bestimmung der gesuchten Faktoren unter Ausnutzung der **linearen Unabhängigkeit**.

Übungen: Aufgaben zu Teilverhältnissen Nr. 5 - 11