7.5. Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt

Aufgabe 1: Skalarprodukt
Berechnen Sie die folgenden Produkte:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Länge eines Vektors
Bestimmen Sie die Länge der folgenden Vektoren und geben Sie jeweils den entsprechenden Einheitsvektor an.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3a \\ 0 \\ 4a \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Abstand Punkt-Punkt
Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder sogar gleichseitig ist.

a) A(0|0|0), B(−1|4|8) und C(3|6|6)
b) A(0|0|0), B(−4|3|5) und C(−1|7|0)
c) A(1|0|−2), B(10|8|10) und C(12|2|8)

Aufgabe 4: Abstand Punkt-Punkt

Untersuchen Sie die folgenden Punkte auf ihre Lage bezüglich einer Kugel mit dem Mittelpunkt M(0|0|0) von Radius 9: Liegen sie in, auf oder außerhalb der Kugel?

A(1|4|8), B(−7|4|−4), C(8|−4|0), D(3|−8|3), E(5|−7|2)

Aufgabe 5: Längen und Winkel im Dreieck mit dem Skalarprodukt
Berechnen Sie die Seitenlängen, die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreieckes ABC mit Hilfe des Skalarproduktes.

a) A(2|3|0), B(−1|10|−4) und C(−2|0|7)
b) A(8|0|0), B(−6|0|7) und C(6|15|−4)

Aufgabe 6: Geometrische Beweise mit dem Skalarprodukt
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Skalarproduktes:

a) Liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig. (Thales)
b) Bei jedem rechtwinkligen Dreieck liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf der Hypotenuse. (Umkehrung des Satzes von Thales; der Beweis benötigt **kein** Skalarprodukt und folgt sofort aus der Ergänzung zu einem Rechteck)
c) In einem Parallelogramm ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Flächeninhalte über den zwei Diagonalen
d) Wenn ein Parallelogramm gleich lange Seiten hat, dann sind die Diagonalen orthogonal.
e) Wenn ein Parallelogramm orthogonale Diagonalen hat, dann sind die Seiten gleich lang.
f) In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.
g) Wenn ein Parallelogramm gleich lange Diagonalen hat, dann ist es ein Rechteck.

Aufgabe 7: Vektorprodukt
Berechnen Sie die folgende n Produkte:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Dreiecksflächen mit dem Vektorprodukt
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke aus Aufgabe 5 mit Hilfe des Vektorpoduktes.

Aufgabe 9: Normalenvektoren zu einer Ebene
Geben Sie jeweils die beiden Einheits-Normalenvektoren zu der Ebene E an. Bestimmen Sie anschließend die zu E orthogonale Gerade g, die den gleichen Stützvektor wie E besitzt.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10: Normalenvektoren zu einer Geraden
Geben Sie jeweils alle Normalenvektoren zu der Geraden g an. Bestimmen Sie anschließend die zu g orthogonale Ebene E, die den gleichen Stützvektor wie g besitzt.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

7.5. Lösungen zu den Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt

Aufgabe 1: Skalarprodukt

a) -8 b) 0 c) 0 d) $(1-a)^2$

Aufgabe 2: Länge eines Vektors

$|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$ s, $|\vec{c}| = 3t$, $|\vec{d}| = 5a$

Aufgabe 3: Abstand Punkt-Punkt

a) $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 2\sqrt{6}$, $\overline{CA} = 9 \Rightarrow$ gleichschenklig

b) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$ gleichseitig

c) $\overline{AB} = 17$, $\overline{BC} = 2\sqrt{11}$, $\overline{CA} = 15$

Aufgabe 4 Abstand Punkt-Punkt

$\overline{AM} = \overline{BM} = 9 \Rightarrow$ A und B liegen auf der Kugel, $\overline{CM} = \sqrt{80} < 9$, $\overline{EM} = \sqrt{78} < 9 \Rightarrow$ C und E liegen im Inneren der Kugel, $\overline{DM} = \sqrt{82} > 9 \Rightarrow$ D liegt außerhalb der Kugel.

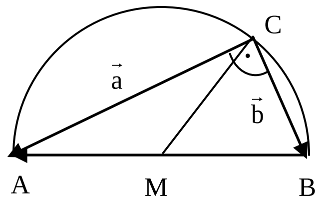
Aufgabe 5: Längen und Winkel im Dreieck

a) $\overline{AB} = \sqrt{74}$, $\overline{BC} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{74}$, $\overline{CA} = \sqrt{74}$, $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$, $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\beta = \frac{37}{2}\cdot\sqrt{3}$ FE $\approx$ 32,04 FE (gleichschenkliges Dreieck)

b) $\overline{AB} = 7\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 7\sqrt{10}\cdot\sqrt{74}$, $\overline{CA} = = 7\sqrt{5}$, $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$, $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CA} = 122{,}5$ FE (gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck)

Aufgabe 6: Geometrische Beweise mit dem Skalarprodukt

a) gegeben: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ und $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$



zu zeigen: $\vec{a} * \vec{b} = 0$

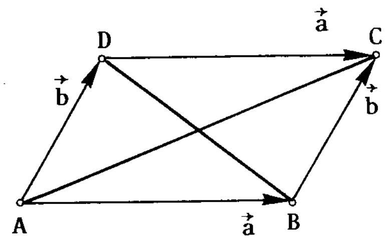
Beweis:

$$\begin{aligned}\vec{a} * \vec{b} &= (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA})*(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB})\\ &= (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA})*(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MA})\\ &= \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{MA}*\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MA}*\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MA}^2\\ &= \overrightarrow{CM}^2 - \overrightarrow{MA}^2\\ &= 0, \text{ qed.}\end{aligned}$$

b) Der Umkreismittelpunkt eines Dreieckes lässt sich als Mittelpunkt der Mittelsenkrechten eindeutig konstruieren. Ist das Dreieck rechtwinklig, so lässt es sich zu einem Rechteck ergänzen, dessen Diagonale die Hypotenuse bildet. Die beiden Diagonalen sind gleichlang und schneiden sich in der Mitte. Ihr Schnittpunkt ist also der eindeutig bestimmte Mittelpunkt des Umkreises.

c) gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

zu zeigen: $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$



Beweis:

linke Seite: $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2$

rechte Seite: $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (-\vec{a} + \vec{b})^2$

$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}*\vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}*\vec{b} + \vec{b}^2$

$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2$ qed.

d) gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mit $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

zu zeigen: $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} = 0$

Beweis: $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b})*(-\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 0$ qed

e) gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mit $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} = 0$

zu zeigen: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$

Beweis:

linke Seite: $\vec{a}^{\,2} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD})^2 = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^{\,2}] = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AC}^{\,2} + \overrightarrow{BD}^{\,2}]$

rechte Seite: $\vec{b}^{\,2} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD})^2 = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AC}^{\,2} + 2\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^{\,2}] = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AC}^{\,2} + \overrightarrow{BD}^{\,2}]$ qed

f) gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mit $\vec{a} * \vec{b} = 0$
zu zeigen: $\overrightarrow{AC}^{\,2} = \overrightarrow{BD}^{\,2}$
Beweis:
linke Seite: $\overrightarrow{AC}^{\,2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} * \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} =$
linke Seite: $\overrightarrow{BD}^{\,2} = (-\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a} * \vec{b} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}$, qed.

g) gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ mit $\overrightarrow{AC}^{\,2} = \overrightarrow{BD}^{\,2}$
zu zeigen: $\vec{a} * \vec{b} = 0$
Beweis:
$\vec{a} * \vec{b} = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}) * (\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^{\,2} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^{\,2} = 0$ qed.

Aufgabe 7: Vektorprodukt

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a - a^2 \\ a^2 - 1 \\ 1 - a \end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Flächen und Winkel im Dreieck mit dem Vektorprodukt

a) $A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 37 \\ 37 \\ 37 \end{pmatrix}\right| = \frac{37}{2} \cdot \sqrt{3}$ FE $\approx 32{,}04$ FE

b) $A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -105 \\ -70 \\ -210 \end{pmatrix}\right| = \frac{35}{2} \cdot 7$ FE $= 122{,}5$ FE

Aufgabe 9: Normalenvektoren zu einer Ebene

a) $\overrightarrow{n_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow g\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{n_0} = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g\text{: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10: Normalenvektoren zu einer Geraden

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $0n_1 + 2n_2 + 1n_3 = 0 \Rightarrow$ für $n_1 = s \in \mathbb{R}$ und $n_2 = t \in \mathbb{R}$ ist $n_3 = -2t \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ besitzt die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $1n_1 + 2n_2 - 1n_3 = 0 \Rightarrow$ für $n_2 = s \in \mathbb{R}$ und $n_3 = t \in \mathbb{R}$ ist $n_1 = t - 2s \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} t-2s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ besitzt die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $1n_1 + 0n_2 + 3n_3 = 0 \Rightarrow$ für $n_2 = s \in \mathbb{R}$ und $n_3 = t \in \mathbb{R}$ ist $n_1 = -3t \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -3s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ besitzt die Normalenvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $-5n_1 + 6n_2 + 10n_3 = 0 \Rightarrow$ für $n_2 = s \in \mathbb{R}$ und $n_3 = t \in \mathbb{R}$ ist $n_1 = 1{,}2s + 2t \Rightarrow \vec{n} = s\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$