7.5. Prüfungsaufgaben zum Skalarprodukt

Aufgabe 1: Normaleneinheitsvektor (4)

Bestimme eine Normaleneinheitsvektor zu der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit r, s ∈ ℝ.

Lösung

$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Vektorprodukt oder zweimal Skalarprodukt)

Aufgabe 2: Normaleneinheitsvektor (4)

Bestimme eine Normaleneinheitsvektor zu der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit r, s ∈ ℝ.

Lösung

$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Vektorprodukt oder zweimal Skalarprodukt)

Aufgabe 3: Skalarprodukt (4)

Gegeben sind die Punkte A(1|0|2), B(1|1|9), C(1|8|8) und D(1|7|1). Zeige, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.

Lösung:

Die Diagonalen sind orthogonal zueinander, weil $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} = 0$. (1)

Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig, denn die Geraden (AB): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und (BD):

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + s\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ schneiden sich für $r = s = \frac{1}{2}$ im Punkt S(1|4|5). (3)

Aufgabe 4: Skalarprodukt (4)

Gegeben sind die Punkte A(1|0|2), B(0|7|2), C(7|8|2) und D(8|1|2). Zeige, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.

Lösung:

Die Diagonalen sind orthogonal zueinander, weil $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{BD} = 0$. (1)

Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig, denn die Geraden (AB): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und (BD):

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + s\cdot\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneiden sich für $r = s = \frac{1}{2}$ im Punkt S(4|4|2). (3)

Aufgabe 5: Skalarprodukt

Berechnen Sie den Winkel, der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eingeschlossen wird.

Lösung

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$

Aufgabe 6: Skalarprodukt

Berechnen Sie den Winkel, der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ eingeschlossen wird.

Lösung

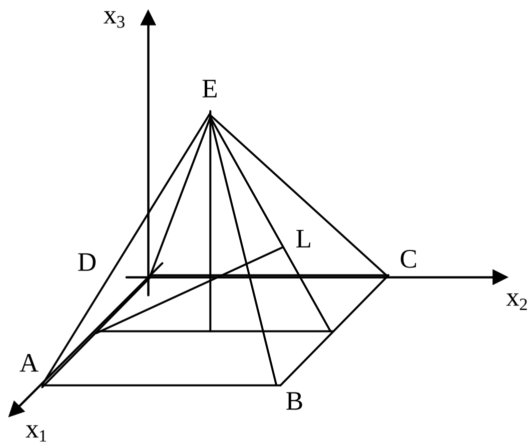
$\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$

Aufgabe 7: Geometrie (9)

Das Dach eines zu renovierenden Kirchturms hat die Form einer quadratischen Pyramide. Sowohl die Länge der Grundseiten als auch die Höhe beträgt 6 Meter.

a) Wieviel Quadratmeter Dachziegel müssen für die Dacherneuerung bestellt werden? (2)

b) Die handgeschnitzten Dachbalken sind denkmalgeschützt und dürfen nicht erneuert werden. Da sie aber morsch sind, sollen sie abgestützt werden. Die Stützbalken sollen senkrecht zur Dachfläche und auf der Mitte der gegenüberliegenden Dachkante liegen. Berechnen Sie die Koordinaten des Stützpunktes L und die Länge d des Stützbalkens. (7)



Lösung

$A = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot h_s = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{45} = 9 \cdot \sqrt{5}\ \text{m}^2$

$\Rightarrow$ Ziegel für $36 \cdot \sqrt{5} \approx 80{,}5\ \text{m}^2$ bestellen. (2)

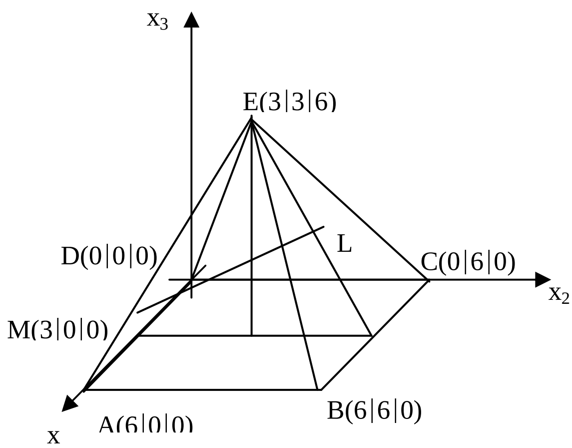
Ebene durch EBC: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ (2)

Normale dazu: n: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ (2)

(Vektorprodukt oder zweimal Skalarprodukt oder ähnliche Dreiecke in der Pyramide)

Gleichsetzen $E \cap n \Rightarrow L(3|\dfrac{24}{5}|\dfrac{12}{5})$ (2)

$\Rightarrow d = \overline{ML} = \dfrac{12}{\sqrt{5}} \approx 5{,}37$ m (1)

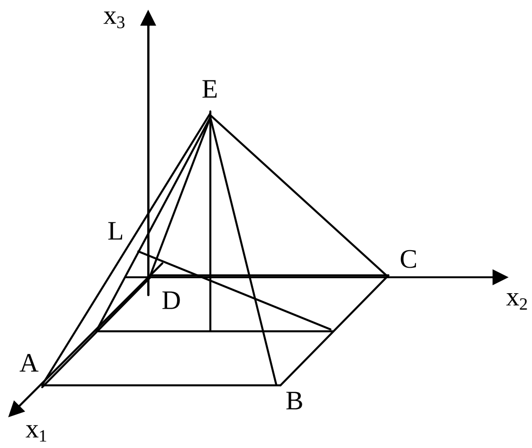


Aufgabe 8: Geometrie (9)

Das Dach eines zu renovierenden Kirchturms hat die Form einer quadratischen Pyramide. Sowohl die Länge der Grundseiten als auch die Höhe beträgt 6 Meter.

c) Wieviel Quadratmeter Dachziegel müssen für die Dacherneuerung bestellt werden? (2)

d) Die handgeschnitzten Dachbalken sind denkmalgeschützt und dürfen nicht erneuert werden. Da sie aber morsch sind, sollen sie abgestützt werden. Die Stützbalken sollen senkrecht zur Dachfläche und auf der Mitte der gegenüberliegenden Dachkante liegen. Berechnen Sie die Koordinaten des Stützpunktes L und die Länge d des Stützbalkens. (7)



Lösung

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{45} = 9 \cdot \sqrt{5}\ m^2$

$\Rightarrow$ Ziegel für $36 \cdot \sqrt{5} \approx 80{,}5\ m^2$ bestellen. (2)

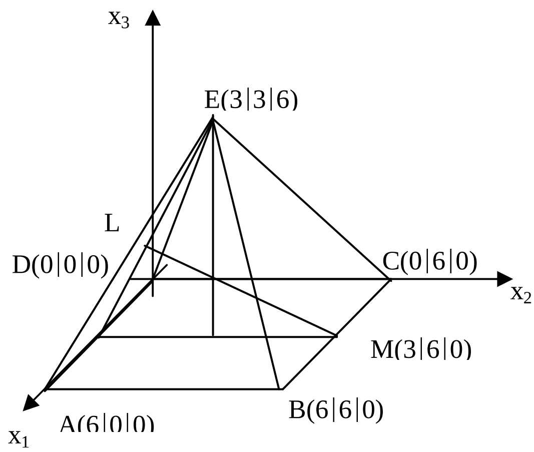
Ebene durch ADE: E: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2)

Normale dazu: n: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2)

(Vektorprodukt oder zweimal Skalarprodukt oder ähnliche Dreiecke in der Pyramide)

Gleichsetzen E ∩ n $\Rightarrow L(3 | \frac{6}{5} | \frac{12}{5})$ (2)

$\Rightarrow d = \overline{ML} = \frac{12}{\sqrt{5}} \approx 5{,}37$ m (1)

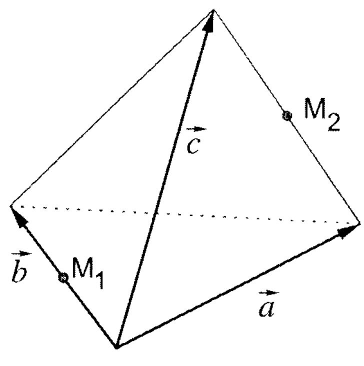


Aufgabe 9 (4)

Ein Tetraeder ist eine dreiseitige Pyramide mit sechs gleich langen Kanten der Länge s. M_1 und M_2 sind gegenüber liegende Kantenmitten (siehe Skizze).

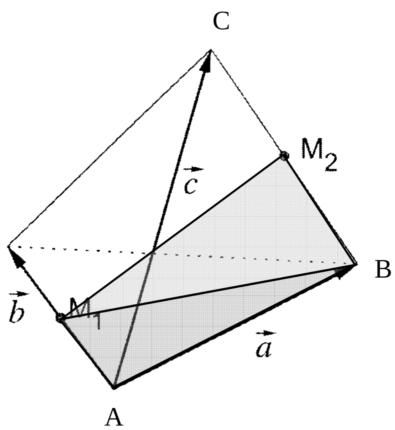
a) Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt $\vec{a} * \vec{b} = \frac{1}{2} s^2$.

b) Bestimmen Sie die Länge der Strecke M_1M_2 in Abhängigkeit von s.



Lösung

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = s \cdot s \cdot \cos(60°) = \frac{1}{2}s^2$. (1)



Die Strecke M_1B ist die Höhe des gleichseitigen Dreieckes mit der Seitenlänge s, auf dem die Pyramide steht. Ihre Länge ist daher $\overline{M_1B} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,s$ (Formelsammlung oder Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck M_1AB). Die Strecke M_1M_2 ist die Höhe des gleichschenkligen Dreieckes M_1BC. mit der Basis $\overline{BC} = s$ und den Schenkeln $\overline{M_1B} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,s$. Mit Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck M_1BM_2 erhält man $\overline{M_1M_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}s\right)^2 - \left(\frac{1}{2}s\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \sqrt{\frac{1}{2}s^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s$ (3)