7.5. Skalarprodukt und Vektorprodukt

7.5.1. Das Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren erhält man, indem man die jeweiligen Komponenten multipliziert und anschließend addiert:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 b_3.$$

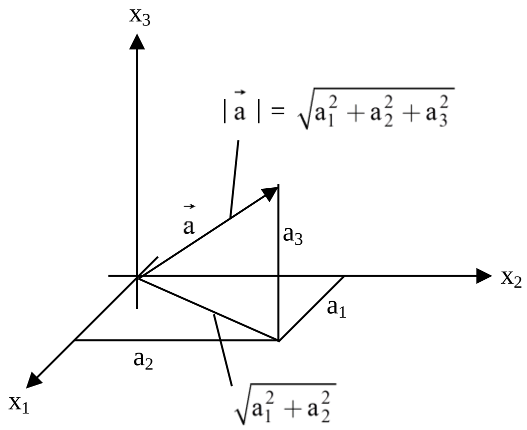
Der Betrag eines Vektors

Der **Betrag** $|\vec{a}|$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist die **Länge** seiner Verschiebungsstrecke und berechnet sich nach Pythagoras zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}\,.$$

Vektoren vom Betrag 1 heißen **Einheitsvektoren**. Für einen gegebenen Vektor $\vec{a}$ erhält man den zugehörigen Einheitsvektor als

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\,.$$



Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 1 - 3

7.5.2. Berechnung eingeschlossener Winkel mit dem Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren ist das Produkt ihrer Längen mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels:

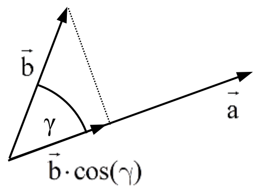
$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

Das Skalarprodukt ist also das Produkt aus dem Betrag von $\vec{a}$ mit dem Betrag der **Komponente von $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$:** $\vec{b}$ wird auf $\vec{a}$ **projiziert** und dann multipliziert.

Die wichtigste Anwendung in der Mechanik ist die **Arbeit**:

Arbeit = Kraft **in Wegrichtung** mal Weg

$W = \vec{F} * \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\gamma)$



Insbesondere gilt

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **parallel** ($\gamma = 0°$ bzw. maximale Wirkung der Kraft **in Wegrichtung**)

$\vec{a} * \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** ($\gamma = 90°$ bzw. die Kraft hat keine Wirkung **in Wegrichtung**)

Beweis:

Man formuliert den Kosinussatz mit $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ und löst nach $\vec{a} * \vec{b}$ auf:

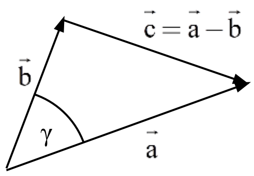
$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos$ | Einsetzen $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ | $|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{\vec{a} * \vec{a}}\right)^2 = \vec{a} * \vec{a}$, usw.

$(\vec{a} - \vec{b}) * (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} * \vec{a} + \vec{b} * \vec{b} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ | Klammern auflösen

$\vec{a} * \vec{a} - 2 \cdot \vec{a} * \vec{b} + \vec{b} * \vec{b} = \vec{a} * \vec{a} + \vec{b} * \vec{b} - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ | nach $\vec{a} * \vec{b}$ auflösen

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$, qed.

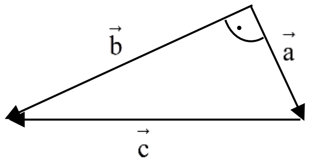


Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 4 - 6

7.5.3. Geometrische Beweise mit dem Skalarprodukt

Beispiel:
Beweise den Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Lösung
gegeben: $\vec{a} * \vec{b} = 0$
zu zeigen: $c^2 = a^2 + b^2$
Beweis: $\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2$
$= \vec{a}^{\,2} - 2\cdot\vec{a} * \vec{b} + \vec{b}^{\,2}$
$= \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}$, qed



Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 5

7.5.4. Das Vektorprodukt

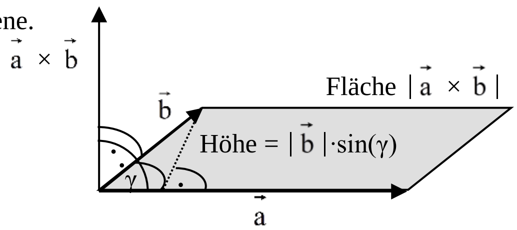
Mit Hilfe des Vektorproduktes lassen sich orthogonale Vektoren und Flächen einfach berechnen. Das Vektorprodukt selbst ist etwas gewöhnungsbedürftig. Die Beweise seiner Eigenschaften sind entsprechend unübersichtlich und daher hier nicht angegeben.

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren erhält man, indem man die jeweils anderen Komponenten kreuzweise multipliziert und addiert:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

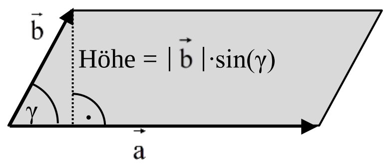
Achtung: Das Vektorprodukt ist **antikommutativ**: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Die Distributiv- und Assoziativgesetze gelten aber.

Flächenberechnungen und Normalenvektoren mit dem Vektorprodukt
Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht **senkrecht** auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.



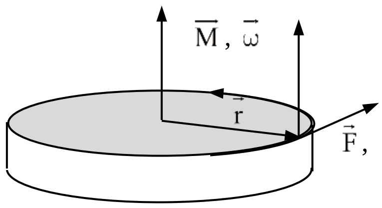
Sein Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\gamma)$ ist gleich der **Fläche** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Der Betrag des Vektorproduktes ist also das Produkt aus
- dem Betrag von $\vec{a}$ mit
- dem Betrag der **Komponente von $\vec{b}$ senkrecht zu $\vec{a}$.** (**Höhe**)



Die wichtigsten Anwendungen in der **Mechanik** sind:

Tangentialgeschwindigkeit = Radius mal Winkelgeschwindigkeit
$\vec{v}_T = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Drehmoment= Radius (Hebelarm) mal (Hebel-)kraft senkrecht zum Radius
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
$M = r\cdot F\cdot\sin(\gamma)$

Insbesondere gilt

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ⇔ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** ($\gamma = 90°$ bzw. maximale **Hebelwirkung** der Kraft)
$|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ⇔ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **parallel** ($\gamma = 0°$ bzw. keine **Hebelwirkung** der Kraft)

Beispiel zur Anwendung des Vektorproduktes

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(1|−2|3), B(−2|1|4) und C(3|2|−1).
b) Bestimme die Gleichung der Geraden g, die senkrecht zu der von ABC aufgespannten Ebene durch den Punkt A verläuft.

Lösung

a) $A = \frac{1}{2} \mid \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \mid = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{170}$ FE ≈ 13,03 FE

b) g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $r = -2t \in \mathbb{R}$.

Übungen: Aufgaben zu Skalarprodukt und Vektorprodukt Nr. 6 - 10