# 7.7. Abituraufgaben analytische Geoemtrie abstrakt

**Aufgabe 1 (13)**

Gegeben sind die Punkte $A(-2|-1|0)$ und $B(4|3|2)$.

a) Berechnen Sie den Abstand $\overline{AB}$ und die Koordinaten des Mittelpunktes M zwischen A und B. (2)

b) A wird durch Spiegelung an der Ebene E auf B abgebildet. Geben Sie die Gleichung der Ebene E an. (Lösung: E: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$) (1)

c) Bestimmen Sie die Spurpunkte $S_1$, $S_2$ und $S_3$ der Ebene E und zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ sowie die Punkte A und B in ein Koordinatensystem. (2,5)

d) Geben Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte $S_2$ und B an. (1)

e) Berechnen Sie den Winkel, den die Gerade g mit der Ebene E einschließt. (1)

f) Berechnen Sie den Winkel, den die Vektoren $\overrightarrow{BS_1}$ und $\overrightarrow{BS_2}$ einschließen. (1,5)

g) Geben Sie die Gleichung der Ebene durch $S_1$, $S_2$ und B in Normalenform an (Lösung: F: $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$) (3)

h) Berechnen Sie den Winkel, den die beiden Ebenen E und F einschließen. (1)

**Lösung**

a) $\overline{AB} = \sqrt{56}$ und $M(1|1|1)$ (2)

b) E: $(\vec{x} - \vec{p})\cdot\overrightarrow{n_E} = 0$ mit $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ E: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ (1)

c) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|3|0)$ und $S_3(0|0|6)$ mit Zeichnung (2,5)

d) g: $\vec{x} = \overrightarrow{OS_2} + r\cdot\overrightarrow{S_2B} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ (1)

e) $\sphericalangle(E; g) = \sin^{-1}\left(\frac{\left|\overrightarrow{n_E} * \overrightarrow{S_2B}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{S_2B}\right|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{20}}\right) = \sin^{-1}(\sqrt{0,7}) \approx 56,79°$ (1)

f) $\sphericalangle(S_1BS_2) = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\overrightarrow{BS_1} * \overrightarrow{BS_2}\right|}{\left|\overrightarrow{BS_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BS_2}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}}\right) \approx 49,90°$ (1,5)

g) F: $\vec{x} = \overrightarrow{OS_2} + s\cdot\overrightarrow{S_2B} + t\cdot\overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ mit Normalenvektor $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

F: $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6$ (3)

h) $\sphericalangle(E; F) = \cos^{-1}\left(\frac{\left|\overrightarrow{n_E} * \overrightarrow{n_F}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_F}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{14}\cdot 7}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74,50°$ (1)

**Aufgabe 2 (9)**

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und für jede reelle Zahl a die Gerade $h_a$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\a\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass g zu keiner Geraden $h_a$ parallel ist.
Für welche reelle Zahl a schneidet $h_a$ die Gerade g?
Alle Geraden $h_a$ liegen in einer Ebene H.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von H. (5 VP)

b) Für welchen Wert von a ist der Abstand der Geraden g und $h_a$ am größten? (4 VP)

**Lösung**

a) Die Richtungsvektoren wären parallel, wenn $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = u\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\a\end{pmatrix} \Rightarrow u = 0{,}5$ und $u = -2 \Rightarrow$ Widerspruch. (1)

$\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -1\\2 & 1 & 1\\0 & -a & -1\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & -1\\0 & 5 & 3\\0 & -a & -1\end{array}\right)$ hat eine Lösung für $a = \frac{5}{3}$ (2)

H: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ H: $x_1 + 2x_2 = -1$ (2)

b) Abstand $d(a) = \dfrac{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2a\\-a\\-5\end{pmatrix}}{\sqrt{5a^2+25}} = \dfrac{-3a+5}{\sqrt{5a^2+25}}$ ist maximal für $a = -3$.(GTR) (4)

**Aufgabe 2 (17)**

Gegeben sind die Punkte $P_t(3t|4t|-1)$ und $Q_t(3t+1|4t-1|5t^2+1)$ für $t \in \mathbb{R}$.

a) Die Punkte $P_t$ liegen auf einer gemeinsamen Geraden g. Geben Sie eine Gleichung für g an.
Die Punkte $Q_t$ liegen in einer gemeinsamen Ebene E. Geben Sie eine Gleichung für E an.
Zeigen Sie, das die Gerade g parallel zu Ebene E verläuft und berechnen Sie den Abstand zwischen g und E.
(5 VP)

b) Berechnen Sie den minimalen Abstand, den die Punkte $P_t$ und $Q_t$ voneinander haben können. Für welches t wird dieser Abstand erreicht?
(3 VP)

c) Die Punkte $Q_{-2}$, $Q_t$ und $Q_2$ bilden ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit vom Parameter t. Für welches t ist das Dreieck gleichschenklig? Wie groß ist dann der Basiswinkel?
(9 VP)

**Lösung**

a) Die Gerade g wird durch zwei beliebig gewählte Punkt, z.B. $P_0(0|0|-1)$ und $P_1(3|4|-1)$ festgelegt: g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Die Ebene E wird durch drei beliebig gewählte Punkte, z.B. $Q_{-1}(-2|-5|6)$, $Q_0(1|-1|1)$ und $Q_1(4|3|6)$ festgelegt: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ_0} + r\,\overrightarrow{Q_0Q_{-1}} + s\,\overrightarrow{Q_0Q_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Ein Normaleneinheitsvektor von E ist $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{P_0P_1} = 0$ ist g || E. (2 VP)

Der Abstand zwischen E und g ist $d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{P_0Q_0} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{7}{5}$ LE. (1 VP)

b) Der gesuchte Abstand ist $\left|\overrightarrow{P_tQ_t}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\\5t^2+2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25t^4+20t^2+6}$ LE. (2 VP)

Er ist minimal für t = 0 mit $\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\right| = \sqrt{6}$ LE. (1 VP)

c) Als Grundseite wählt man $Q_{-2}Q_2$ mit der Länge $g = \left|\overrightarrow{Q_{-2}Q_2}\right| = 4\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right\| = 20$ LE. (1 VP)

Die Gerade durch $Q_{-2}$ und $Q_2$ ist h: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ_{-2}} + t\cdot\overrightarrow{Q_{-2}Q_2} = \begin{pmatrix}-5\\-9\\21\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. (1 VP)

Die Hilfsebene senkrecht zu h durch $Q_t$ ist E: $(\vec{x} - \overrightarrow{OQ_t}) * \overrightarrow{Q_{-2}Q_2} = 0 \Leftrightarrow$

E: $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3t+1\\4t-1\\5t^2+1\end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ E: $3x_1 + 4x_2 = 25t - 1$. (1 VP)

Der Lotfusspunkt $L = h \cap E$ ergibt sich durch Einsetzen von h in E:

$3\cdot(-5 + 12r) + 4(-9 + 16r) = 25t - 1 \Leftrightarrow -51 + 100r = 25t - 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}-5\\-9\\21\end{pmatrix} + (\frac{1}{4}t + \frac{1}{2})\begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3t+1\\4t-1\\21\end{pmatrix}$. (2 VP)

Die Höhe ist dann $LQ_t$ mit der Länge $h = \left|\overrightarrow{LQ_t}\right| = \left\|\begin{pmatrix}0\\0\\5t^2-20\end{pmatrix}\right\| = 5\,|t^2 - 4|$ LE. (1 VP)

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $A_t = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = 50\,|t^2 - 4|$ FE. (1 VP)

Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn der Lotfusspunkt $L(3t + 1)|4t - 1|21)$ genau in der Mitte zwischen $Q_{-2}(-5|-9|21)$ und $Q_2(7|7|21)$ liegt, d.h. für $3t + 1 = 1$ und $4t - 1 = -1 \Leftrightarrow t = 0$. (1 VP)

Der Basiswinkel ist dann $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{Q_2Q_0} * \overrightarrow{Q_2Q_{-2}}}{\left|\overrightarrow{Q_2Q_0}\right| \cdot \left|\overrightarrow{Q_2Q_{-2}}\right|}\right) = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix}-6\\-8\\-20\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-12\\-16\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{500}\cdot\sqrt{300}} = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{15}} \approx 58{,}9°$ (1 VP)

Alternative mit Vektorprodukt:

$A = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{Q_{-2}Q_t} \times \overrightarrow{Q_{-2}Q_2}\,| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3t+6\\4t+8\\5t^2-20\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-80t^2+320\\60t^2-240\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{80^2(t^2-4)^2 + 60^2(t^2-4)^2} = 50|t^2-4|$

Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn $\left|\overrightarrow{Q_{-2}Q_t}\right| = \left|\overrightarrow{Q_2Q_t}\right| \Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix}3t+6\\4t+8\\5t^2-20\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}3t-6\\4t-8\\5t^2-20\end{pmatrix}\right\| \Leftrightarrow t = 0$