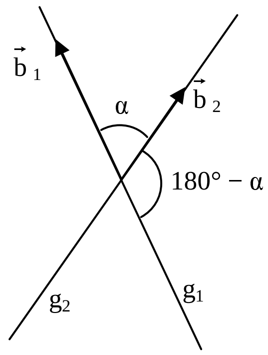
7.7. Abstände und Winkel

7.7.1. Winkel Gerade - Gerade

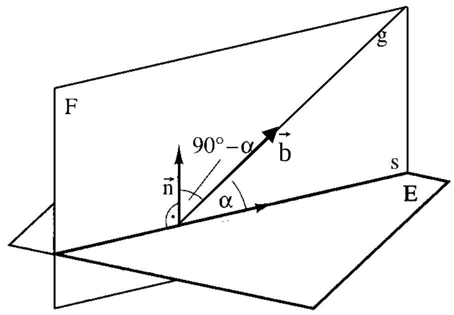
Schnittwinkel zweier Geraden:
Am Schnittpunkt zweier Geraden g_1 und g_2 lassen sich die beiden Winkel $\sphericalangle(g_1, g_2)$ und $\sphericalangle(g_2, g_1)$ messen. Als **Schnittwinkel** bezeichnet man denjenigen der beiden Winkel, der kleiner oder gleich 90° ist, d.h., dessen **Kosinus** größer oder gleich Null ist:
Schneiden sich die Geraden g_1 und g_2 mit den **Richtungsvektoren** $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$, so gilt für den Schnittwinkel α: $\cos\alpha = \frac{\left|\vec{b}_1 * \vec{b}_2\right|}{\left|\vec{b}_1\right| \cdot \left|\vec{b}_2\right|}$



Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 1 - 3

7.7.2. Winkel Gerade - Ebene

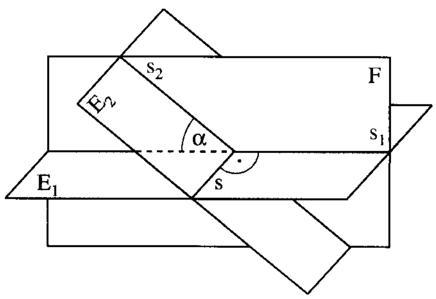
Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene:
Schneidet sich die Gerade g mit dem **Richtungsvektor** $\vec{b}$ und die Ebene E mit dem **Normalenvektor** $\vec{n}$, so bezeichnet man als Schnittwinkel den kleinsten Winkel, der zwischen g und einer in E liegenden Geraden s gebildet werden kann. Die gesuchte Gerade s ist die **Schnittgerade** der von $\vec{b}$ und $\vec{n}$ aufgespannten **Schnittebene** F mit der Ebene E und wird auch **Spur** von g auf E genannt. Für den Schnittwinkel α erhält man dann: $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\left|\vec{n} * \vec{b}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

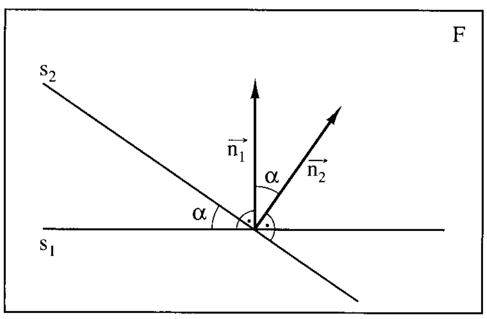


Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Aufgaben 4 und 5

7.7.3. Winkel Ebene - Ebene

Schnittwinkel zweier Ebenen:
Schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2 mit den **Normalenvektoren** $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$, so betrachtet man wieder die von $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ aufgespannte **Schnittebene** F mit den **Schnittgeraden** s_1 und s_2. Für den Schnittwinkel α erhält man dann: $\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 * \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$

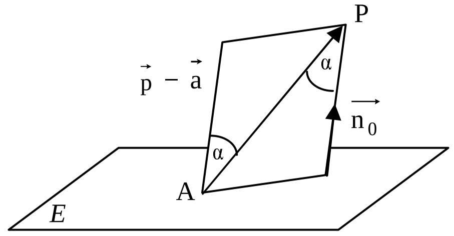




Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 6 und 7

7.7.4. Abstand Punkt - Ebene

Abstand Punkt - Ebene:
Der **Abstand** d eines Punktes P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ von einer Ebene E: $(\vec{x} - \vec{a}) * \vec{n} = 0$ ist $d = |(\vec{p} - \vec{a}) * \overrightarrow{n_0}|$. Dabei heißt $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ auch **Normalen-Einheitsvektor** der Ebene E. Die Gleichung E: $(\vec{x} - \vec{a}) * \vec{n}_0 = 0$ heißt **Hessesche Normalform** der Ebenengleichung.
Beweis: $|(\vec{p} - \vec{a}) * \overrightarrow{n_0}| = \overline{AP} \cdot 1 \cdot \cos\alpha = d$ (siehe Zeichnung)



Beispiel:

Bestimme den Abstand des Punktes P(1|3|−2) von der Ebene E: $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$.
Lösung:

1. Der **Normalenvektor** $\vec{n}$ ergibt sich aus den Koeffizienten der Ebenengleichung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Seine Länge ist

   $|\vec{n}| = \sqrt{11}$. Der **Normaleneinheitsvektor** ist also $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Als **Stützvektor** kann eine beliebige Lösung der Ebenengleichung gewählt werden, z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

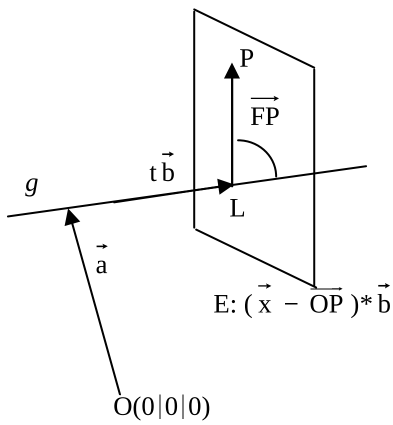
3. Der gesuchte **Abstand** ist dann $d = |(\vec{p} - \vec{a}) * \overrightarrow{n_0}| = \left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) * \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{11}} \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{\sqrt{11}}$ LE.

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 9 - 12

7.7.5. Abstand Punkt - Gerade

Abstand Punkt - Gerade
Der **Abstand** d des Punktes P von der Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$ ist $d = |\overrightarrow{LP}|$.
Dabei ist L der **Fußpunkt** des **Lotes** von P auf g. Man erhält ihn als Schnittpunkt der Geraden g mit der **Hilfsebene** E: $(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) * \vec{b} = 0$**, die senkrecht zu g durch P verläuft**.

Beweis: siehe Zeichnung



Beispiel:

Bestimme den Abstand des Punktes P(3|−1|2) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

1. Die Gleichung der **Hilfsebene** ist E: $(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) * \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ E: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ E: $x_1 - 2x_3 = -1$.

2. Den **Lotfußpunkt** $L = g \cap E$ erhält man durch Einsetzen der Geradengleichung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung E: $x_1 - 2x_3 = -1 \Rightarrow L = g \cap E$: $(1 + t) - 2(3 - 2t) = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$ Den Parameter $t = -\frac{3}{2}$ setzt man in die Geradengleichung ein und erhält $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

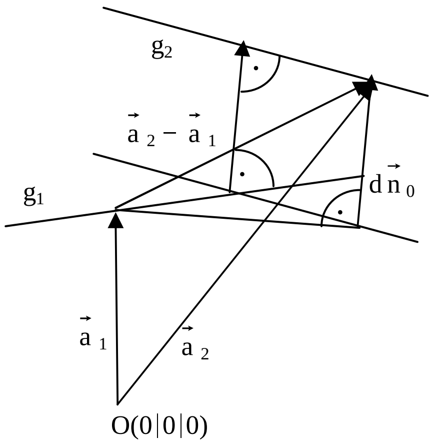
3. Der gesuchte **Abstand** ist dann $d = |\overrightarrow{LP}| = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{5}{4}\sqrt{5}$ LE.

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 13 - 15

7.7.6. Abstand Gerade - Gerade

Abstand Gerade - Gerade:
Der **Abstand** d zwischen den beiden Geraden g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + r\vec{b}_1$ und g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + s\vec{b}_2$ ist $d = |(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) * \overrightarrow{n_0}|$. Dabei ist $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ ein **Normalen-Einheitsvektor** sowohl für g_1 als auch g_2. Geeignete Einheitsvektoren $\vec{n}$ erhält man mit dem **Skalarprodukt** aus den Bedingungen $\vec{n} * \vec{b}_1 = \vec{n} * \vec{b}_2 = 0$ oder mit dem **Vektorprodukt** als $\vec{n} = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$.

Beweis: siehe Zeichnung



Beispiel:

Bestimme den Abstand zwischen den beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Der gemeinsame Normaleneinheitsvektor ist $\overrightarrow{n_0} = \frac{\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}}{|\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der gesuchte Abstand ist also $d = |(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) * \overrightarrow{n_0}| = \left|\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) * \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{30}}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{20}{\sqrt{30}}$ LE

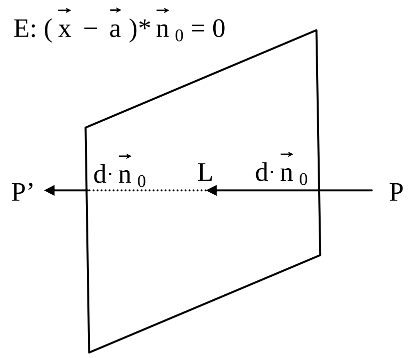
Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 16- 18

7.7.7. Spiegelung Punkt an Ebene

Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Um den Punkt P an der Ebene E: $(\vec{x} - \vec{a}) * \vec{n}_0 = 0$ zu spiegeln, geht man folgendermaßen vor:

1. Abstand $d = |(\overrightarrow{OP} - \vec{a}) * \overrightarrow{n_0}|$ des Punktes P von der Ebene E bestimmen
2. Durch Einsetzen prüfen, ob der Lotfußpunkt L mit $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} + d \cdot \vec{n}_0$ in E liegt.
3. Falls ja, so hat der Bildpunkt P' den Ortsvektor $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\,d \cdot \vec{n}_0$.
   Falls nein, so hat der Bildpunkt P' den Ortsvektor $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\,d \cdot \vec{n}_0$.



Beispiel:

Bestimme den Punkt P', der durch Spiegelung des Punktes P(1|3|2) an der Ebene E: $-x_1 + x_2 - 2x_3 = -4$ entsteht.

Lösung:

4. Der Normaleneinheitsvektor ist $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Ein Stützvektor ist $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$. Der Abstand ist also $d = |(\overrightarrow{OP} - \vec{a}) * \overrightarrow{n_0}| = \frac{2}{\sqrt{6}}$.
5. Der Lotfußpunkt L könnte den Ortsvektor $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} + d \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}$ haben. Einsetzen in E ergibt $x_1 - x_2 + 2x_3 = -\frac{2}{3} + \frac{10}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3} \neq -4$.. L liegt also nicht in E, da $\overrightarrow{n_0}$ in die falsche Richtung von der Ebene weg zeigt. Man geht also besser in die Gegenrichtung auf die Ebene zu und wählt $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} - d \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix}$. Einsetzen in E ergibt $-x_1 + x_2 - 2x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{8}{3} = -4$.
6. Der Bildpunkt hat also den Ortsvektor $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\,d \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} \Rightarrow P'(\frac{5}{3} | \frac{7}{3} | 2)$.

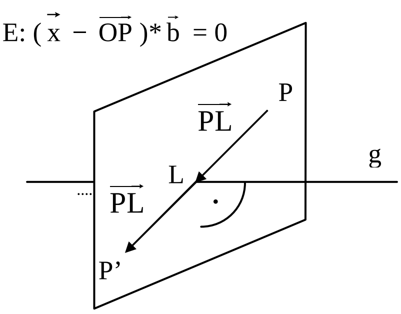
Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 19 und 20

7.7.8. Spiegelung Punkt an Gerade

Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

Um den Punkt P an der Ebene g: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$ zu spiegeln, geht man folgendermaßen vor:

1. Lotfußpunkt L von P auf g als Schnittpunkt von g mit der Hilfsebene E: $(\vec{x} - \overrightarrow{OP}) * \vec{b} = 0$ bestimmen (siehe 4.7.6.)
2. $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}$



Beispiel:

Bestimme den Punkt P', der durch Spiegelung des Punktes P(2|−1|1) an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

entsteht.
Lösung:

1. Die Hilfsebene ist E: E: $(\vec{x} - \overrightarrow{OP})*\vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ E: $2x_1 + x_2 + x_3 = 9$. Den Lotfußpunkt L = g ⯎ E erhält man durch Einsetzen von g in E: $2(3 + 2t) + (-1 + t) + (2 + t) = 9 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$.

   Sein Ortsvektor ist also $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2. Der Bildpunkt hat also den Ortsvektor $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\ \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$

   $P'(\frac{16}{3}|-\frac{1}{3}|\frac{11}{3})$.

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 21 und 22

7.7.9. Spiegelung Punkt an Punkt

Spiegelung eines Punktes an einem Punkt
Wird der Punkt P am Punkt Z gespiegelt, so hat der Bildpunkt P' den Ortsvektor $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\cdot\overrightarrow{PZ}$.

Beispiel:

Bestimme die Gerade g', die man durch Spiegelung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ am Punkt Z(−1|2|4)

erhält.
Lösung:
Man spiegelt **zwei** beliebige Punkte P und Q auf der Geraden g an Z. Wähle z.B. P(3|−1|2) und Q(5|0|3). Die Bildpunkte sind P'(−5|5|6) und Q'(−7|4|5). g' muss dann durch die Bildpunkte P' und Q' verlaufen, also g': $\vec{x} = \overrightarrow{OP'} + r\,\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Übungen: Aufgaben zu Abständen und Winkeln Nr. 23 und 24