

7.8. Aufgaben zu Kugeln

Aufgabe 1: Mittelpunkt und Radius einer Kugel

1. Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Kugel K mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M liegt.
2. Formulieren Sie eine Gleichung, die alle Punkte P auf der Kugel K erfüllen müssen. Verwenden Sie den Ortsvektor \vec{x} des Punktes P, den Ortsvektor \vec{m} des Mittelpunktes M und den Radius r für diese Gleichung.

- a) $M(2|-2|-5)$, $r = 17$ und $P(11|6|7)$
- b) $M(2|-1|3)$, $r = 3\sqrt{5}$ und $P(6|4|5)$
- c) $M(-1|0|-2)$, $r = 10$ und $P(-7|7|2)$

Aufgabe 2: Bestimmung von Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch quadratische Ergänzung

Entscheiden Sie, ob eine Kugelgleichung vorliegt und ermitteln Sie gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius:

- a) $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 0$
- b) $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_1 - 18x_3 - 3 = 0$
- c) $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 22x_1 + 20x_2 - 4x_3 + 225 = 0$
- d) $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 5$

Aufgabe 3: Gemeinsame Punkte zweier Kugeln

Zeigen Sie, dass sich die beiden Kugeln K_1 und K_2 in einem Kreis schneiden und bestimmen Sie die Trägerebene E, den Mittelpunkt M und den Radius r dieses Kreises.

- a) $M_1(1|2|-2)$ mit $r_1 = 3$ und $M_2(4|6|-2)$ mit $r_2 = 3$
- b) $M_1(1,5|3|-3)$ mit $r_1 = 4,5$ und $M_2(5|10|-10)$ mit $r_2 = 6$
- c) $M_1(-4|2|-5)$ mit $r_1 = 3\sqrt{3}$ und $M_2(0|6|2)$ mit $r_2 = 3\sqrt{6}$

Aufgabe 4: Schnittkreis mit einer Ebene

Zeigen Sie, dass die Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r die Ebene E in einem Kreis schneidet. Ermitteln Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' dieses Kreises.

- a) $M(3|6|-4)$ mit $r = 5$ und $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 10$
- b) $M(1|0|-1)$ mit $r = 13$ und $E: 12x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 73$
- c) $M(3|2|6)$ mit $r = 4\sqrt{2}$ und $E: 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 21$

Aufgabe 5: Schnittkreis mit den Koordinatenebenen

Bestimmen Sie die Mittelpunkte und Radien der Kreise, in denen die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(2|-3|6)$ und dem Radius $r = 7$ die Koordinatenebenen schneidet.

Aufgabe 6: Bestimmung einer Kugelgleichung zu gegebenem Schnittkreis und Mittelpunkt

Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die den Punkt $A(8|15|10)$ enthält und die x_1 - x_2 Ebene in einem Kreis um $O(0|0|0)$ mit $r' = 7$ schneidet.

Aufgabe 7: Tangentialebene

Gegeben ist eine Kugel K mit Mittelpunkt M und ein Punkt $B \in K$. Bestimmen Sie den Radius r der Kugel und die Gleichung der Tangentialebene E durch den Punkt B.

- a) $M(1|1|4)$ und $B(3|-1|5)$
- b) $M(3|0|-2)$ und $B(5|-9|4)$
- c) $M(7|-7|3,5)$ und $B(2|-2|1)$

Aufgabe 8: Tangentialebenen

Gegeben ist die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(4|1|-8)$ und dem Radius $r = 13$.

- a) Bestimmen Sie das $w > 0$, so dass $B(8|-2|w)$ auf K liegt und ermitteln Sie dann die Gleichung der Tangentialebene mit dem Berührungspunkt B.
- b) Überprüfen Sie, ob $E: 4x_1 - 3x_2 - 12x_3 = -60$ eine Tangentialebene an K ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Berührungspunkt.

Aufgabe 9: Tangentialebenen

- a) Bestimmen Sie die Kugel K, die die beiden Ebenen $E_1: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -20$ und $E_2: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 50$ berührt und deren Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden von $A(2|2|-1)$ und $B(3|8|1)$ liegt.
- b) Bestimmen Sie die Ebene E, die die beiden Kugeln $K_1: (x_1 - 3)^2 + (x_3 + 2)^2 = 36$ und $K_2: (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 4)^2 = 36$ berührt und den Punkt $P(-1|0|5)$ enthält.

7.8. Lösungen zu den Aufgaben zu Kugeln

Aufgabe 1: Mittelpunkt und Radius einer Kugel

- a) P liegt auf K
- b) P liegt auf K
- c) P liegt außerhalb von K

Aufgabe 2: Bestimmung von Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch quadratische Ergänzung

- a) $M(2|-3|6)$ und $r = 7$
- b) $M(-4|0|9)$ und $r = 10$
- c) $M(11|-10|2)$ und $r = 0$ (!)
- d) $(x_1 - 1,5)^2 + (x_2 + 0,5)^2 + (x_3 - 1,5)^2 = -0,25$ ist für reelle x_1, x_2 und x_3 nicht erfüllbar!

Aufgabe 3: Gemeinsame Punkte zweier Kugeln

- a) E: $6x_1 + 8x_2 = 47$, $M(\frac{5}{2}|4|-2)$ und $r = \frac{1}{2}\sqrt{11}$
- b) E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 27$, $M(3|6|-6)$ und $r = 0$ (Berührungspunkt!)
- c) E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 16$, $M(-\frac{8}{3}|\frac{10}{3}|-\frac{8}{3})$ und $r = 3\sqrt{2}$

Aufgabe 4: Schnittkreis mit einer Ebene

- a) $d = 4$ und $M'(\frac{17}{3}|\frac{10}{3}|-\frac{16}{3})$ mit $r' = 3$
- b) $d = 5$ und $M'(\frac{73}{13}|-\frac{15}{13}|\frac{7}{13})$ mit $r' = 12$
- c) $d = 4$ und $M'(\frac{9}{7}|\frac{6}{7}|\frac{18}{7})$ mit $r' = 4$

Aufgabe 5: Schnittkreis mit den Koordinatenebenen

$$M_{12}(2|-3|0) \text{ mit } r_{12} = \sqrt{13}$$

$$M_{23}(0|-3|6) \text{ mit } r_{23} = 3\sqrt{5}$$

$$M_{13}(2|0|6) \text{ mit } r_{13} = 2\sqrt{10}$$

Aufgabe 6: Bestimmung einer Kugelgleichung zu gegebenem Schnittkreis und Mittelpunkt

$$M(0|0|17) \text{ mit } r = 13\sqrt{2}$$

Aufgabe 7: Tangentialebene

- a) $r = 3$ und E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 13$
- b) $r = 11$ und E: $2x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 115$
- c) $r = 7,5$ und E: $2x_1 - 1x_2 + x_3 = 9$

Aufgabe 8: Tangentialebenen

- a) $w = 4$ und E: $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 = 86$
- b) $d = 13 = r \Rightarrow$ E ist Tangentialebene mit $B(0|0|4)$.

Aufgabe 9: Tangentialebenen

- a) $M(2|2|1)$ mit $r = \frac{7}{2}\sqrt{2}$
- b) E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -11$ mit den Berührungspunkten $B_1(1|-4|2)$ und $B_2(-3|0|4)$