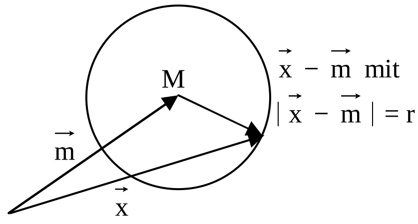
7.8 Kugeln

7.8.1. Mittelpunkt und Radius

Beispiel: Aufgaben zu Kugeln Nr. 1

Mittelpunkt und Radius einer Kugel
Eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r hat die Gleichung K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.

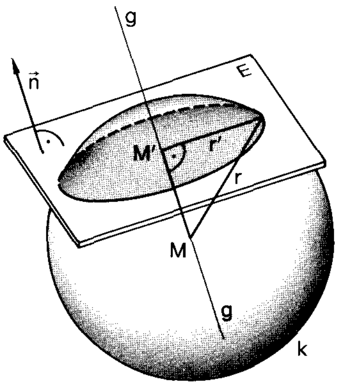


Übungen: Aufgaben zu Kugeln Nr. 2 und 3

7.8.2. Schnittkreis mit einer Ebene

Beispiel: Aufgaben zu Kugeln Nr. 4

Schnittkreis mit einer Ebene
Die Ebene E schneidet die Kugel K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r in einem Kreis, falls der Abstand d des Mittelpunktes von der Eben E kleiner als d ist. Der Mittelpunkte M' des Schnittkreises ist dann der Lotfußpunkt von M auf A. Für den Radius gilt $r'^2 = r^2 - d^2$.



Übungen: Aufgaben zu Kugeln Nr. 5 und 6

Lambacher Schweizer Analysis S 12 S. 193 Nr. 2 (gemeinsame Punkte von Kugel und Ebene)
Nr. 3 (Bestimmung des Schnittkreises)
Nr. 5 (Schneiden und Berühren in Abhängigkeit von r)
S. 194 Nr. 10 (Schnittebene zweier Kugeln)
Nr. 11(Schnittkreis zweier Kugeln)
S. 195 Nr. 15 (Spiegelung an Schnittebene)

7.8.3. Tangentialebenen

Beispiel: Aufgaben zu Kugeln Nr. 7

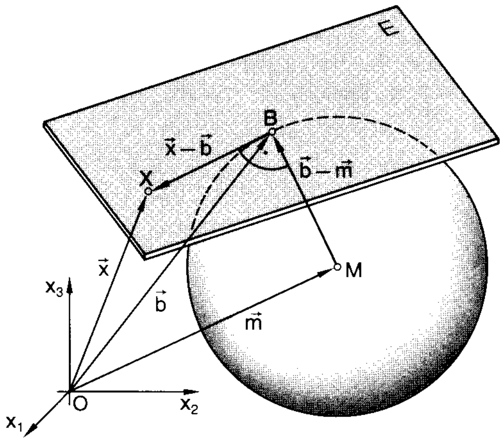
Tangentialebene einer Kugel
Die Tangentialebene an der Kugel K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ hat die Gleichung T: $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$.
Beweis:
Aus der Zeichnung entnimmt man zunächst die Gleichung

T: $(\vec{x} - \vec{b}) * (\vec{b} - \vec{m}) = 0 \Leftrightarrow$

T: $(\vec{x} - \vec{m} + \vec{m} - \vec{b}) * (\vec{b} - \vec{m}) = 0 \Leftrightarrow$

T: $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{b} - \vec{m}) - (\vec{b} - \vec{m})^2 = 0 \Leftrightarrow$

T: $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{b} - \vec{m}) - r^2 = 0$.



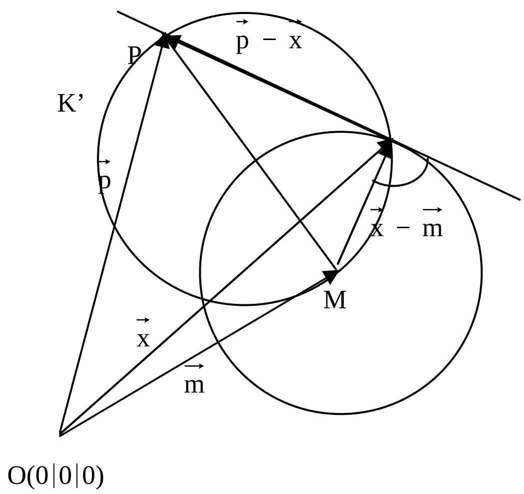
Übungen: Aufgaben zu Kugeln Nr. 8 und 9

Lambacher Schweizer Analysis	*S. 193*	*Nr. 4 (Bestimmung der Tangentialebene)*
		Nr. 6 (Schnittgeraden von Tangentialebenen)
		Nr. 7 (gemeinsame Tangentialebene zweier Kugeln)
	S. 194	*Nr. 8 (Tangentialebene parallel zu gegebener Ebene E)*
		Nr. 9 (Tangentialkugeln)
		Nr. 12 (Kugel zu gegebener Tangentialebene)
	S. 195	*Nr. 13 (Quader in Kugel und Kugel in Quader)*
		Nr. 14 (Abstand Punkt - Kugel)
		Nr. 16 (Tangentialebenen durch gegebene Gerade)
		Nr. 17 (Kugel in Pyramide)

7.8.5. Tangentialkegel und Polarebene

Tangentialkegel und Polarebene

Der **Tangentialkegel** mit der Spitze P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ an der Kugel K: $(\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ berührt die Kugel in einem Kreis. Dieser Kreis ist der Schnittkreis der Kugel mit der **Polarebene** E: $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$.



Beweis:

Aus der Zeichnung entnimmt man zunächst die Gleichung

K': $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$

K': $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{m} + \vec{m} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$

K': $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{m}) - (\vec{x} - \vec{m})^2 = 0 \Leftrightarrow$

E: $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{m}) - r^2 = 0$.

Bemerkung:

K':$(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{p} - \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow$

K': $(\vec{x} - \vec{m}) * (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \Leftrightarrow$

K': $\vec{x}^2 - (\vec{m} + \vec{p}) * \vec{x} + \vec{m} * \vec{p} = 0 \Leftrightarrow$

K': $(\vec{x} - \frac{1}{2}(\vec{m} + \vec{p}))^2 = \frac{1}{2}(\vec{m} - \vec{p})^2$

beschreibt die „**Thaleskugel**" durch P und M, die die Polarebene bzw. den Tangentialkegel bzw. K ebenfalls im Schnittkreis schneidet.

Übungen:

Lambacher Schweizer Analysis	*S. 198*	*Nr. 3 (gemeinsame Punkte mit Geraden))*
		Nr. 4 (Kugel zu gegebener Tangenten)
		Nr. 5 (schneiden und Berühren in Abhängigkeit von Parametern
	S. 199	*Nr. 6 (Pol zu gegebener Ebene E und Kugel K)*
		Nr. 7 und 8 (Berührkreis zu Punkt und Kugel)
		Nr. 9 (Punkt zu gegebener Kugel und Berührkreis)
		Nr. 10 (gemeinsamer Tangentialkegel zweier Kugeln)
		Nr. 11 (Öffnungswinkel eines Tangentialkegels)
		Nr. 12 (Berührkugeln zu zwei gegebenen Ebenen)
		Nr. 13 (Berührkugeln zu gegebener Gerade)