8.1. Aufgaben zu Gruppen

Aufgabe 1
a) Gib eine möglichst große Zahlenmenge an, auf der die Division wohl definiert ist.
b) Gib eine möglichst große Vektormenge an, auf der die Addition wohl definiert ist.
c) Gib eine möglichst große Matrizenmenge an, auf der die Multiplikation wohl definiert ist.

Aufgabe 2
a) Gib eine möglichst kleine Zahlenmenge an, die bezüglich der Subtraktion abgeschlossen ist.
b) Gib eine möglichst kleine Zahlenmenge an, die bezüglich der Division abgeschlossen ist.
c) Gib eine möglichst kleine Matrizenmenge an, die bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.

Aufgabe 3
Zeige anschaulich
a) mit Hilfe von Stiften aus deiner Federmappe, dass die Addition assoziativ ist.
b) mit Hilfe eines Quaders, dass die Multiplikation assoziativ ist.

Aufgabe 4
a) Auf der Menge der komplexen Zahlen $(a|b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist die Multiplikation definiert durch $(a_1|b_1)\cdot(a_2|b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2|a_1b_2 + a_2b_1)$. Zeige, dass das Element $(1|0)$ das neutrale Element dieser Verknüpfung ist.
b) Zeige, dass die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation auf der Menge der 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 5
a) Zeige, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation das inverse Element $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ besitzt.
b) Zeige, dass die komplexe Zahl $(a|b)$ bezüglich der in Aufgabe 4 definierten Multiplikation das inverse Element $(a|b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\middle|\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ besitzt.

Aufgabe 6
a) Zeige an einem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist
b) Zeige an einem Beispiel, dass das Kreuzprodukt für dreidimensionale Vektoren antikommutativ ist, d.h. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Aufgabe 7
In der Verschlüsselungstechnik rechnet man oft mit Resten modulo n, die bei Division durch eine natürliche Zahl n entstehen. Die Menge der Reste modulo 4 besteht also aus den 4 Resten $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}$ und $\bar{3}$. Die Summe zweier Reste wird als der Rest der gewöhnlichen Summe der Reste definiert. Z.B. ist $\bar{2} + \bar{3} = \bar{1}$, weil 2 + 3 = 5 den Rest 1 besitzt.
Vervollständige die Verknüpfungstafel und untersuche die Menge der Reste modulo 4 bezüglich der Addition auf die Gruppeneigenschaften.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$				
$\bar{1}$				
$\bar{2}$				
$\bar{3}$			$\bar{1}$	

Aufgabe 8
Gib eine Zahlenmenge an, der mit der Multiplikation · eine Gruppe bildet. Welche Zahl muss man zur Erhaltung der Wohldefiniertheit dabei ausschließen? Warum wird die Abgeschlossenheit dabei nicht beeinträchtigt?

Aufgabe 9

Ein Punkt wird in der Koordinatenebene durch den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ um a Einheiten in x-Richtung und um b-Einheiten in y-Richtung verschoben. Zeige, dass die Menge der Parallelverschiebungen bezüglich der Vektoraddition (= Hintereinanderausführung zweier Verschiebungen) eine kommutative Gruppe bildet.

Aufgabe 10

Ein Punkt wird in der Koordinatenebene durch die Matrix $M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung gedreht. Zeige, dass die Menge M der Drehungen bezüglich der Matrizenmultiplikation (= Hintereinanderausführung zweier Drehungen) eine kommutative Gruppe bildet. Verwende die Additionstheoreme $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$.

8.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Gruppen

Aufgabe 1

a) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) Die Menge aller Vektoren mit fester Zeilenzahl $n \in \mathbb{N}$ und reellen Komponenten

c) Die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit festem $n \in \mathbb{N}$ und reellen Komponenten

Aufgabe 2

a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 3: -

Aufgabe 4

a) $(1|0)\cdot(a|b) = (1\cdot a - 0\cdot b|1\cdot b + 0\cdot b) = (a|b)$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

a) $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\middle|\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\cdot(a|b) = (1|0)$

Aufgabe 6

a) z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\bar{0}$ ist das **neutrale** Element, weil die Spalte bzw. Zeile genau die Kopfzeile bzw. Kopfzeile zurückliefern, d.h. $\bar{0} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$.

Jedes Element hat ein **inverses** Element, weil in jeder Zeile bzw. Spalte das neutrale Element $\bar{0}$ erscheint. Z.B. ist $-\bar{3} = \bar{1}$, weil $\bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$.

Aufgabe 8

$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine multiplikative Gruppe, weil jedes Element $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ das inverse Element $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ besitzt. Die Abgeschlossenheit wird durch den **Satz vom Nullprodukt** garantiert: $a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Aufgabe 9
Alle Eigenschaften folgen aus den Gruppeneigenschaften der zweidimensionalen Vektoren bezüglich der Vektoraddition.

Aufgabe 10

Das **neutrale Element** ist wie bei allen quadratischen Matrizen die **Einheitsmatrix** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das **inverse Element** von $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die **Abgeschlossenheit** folgt mit den **Additionstheoremen**, denn $M_\alpha * M_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = M_{\alpha+\beta}$ ist wieder eine Drehung um den Winkel $\alpha + \beta$. Aus der gleichen Beziehung folgt auch die **Kommutativität** der Gruppe, denn $M_\alpha * M_\beta = M_{\alpha+\beta} = M_{\beta+\alpha} = M_\beta * M_\alpha$.