

## 8.1. Prüfungsaufgaben zu Gruppen

### Aufgabe 1 (6)

Erkläre den Begriff der Kommutativität einer Verknüpfung. Zeige an einem Beispiel, dass das Vektorprodukt nicht kommutativ ist.

### Lösung

Eine Verknüpfung  $\circ$  auf einer Menge  $M$  heißt **kommutativ**, wenn für alle  $a, b \in M$  gilt  $a \circ b = b \circ a$ : Alle Elemente aus  $M$  sind bezüglich  $\circ$  **vertauschbar**. Für das Vektorprodukt auf der Menge der dreidimensionalen

Vektoren gilt dies nicht, denn z.B.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

### Aufgabe 2 (2)

Erkläre den Begriff der Abgeschlossenheit einer Verknüpfung. Zeige an einem Beispiel, dass das Skalarprodukt nicht abgeschlossen ist.

### Lösung

Eine Verknüpfung  $\circ$  auf einer Menge  $M$  heißt **abgeschlossen**, wenn für alle  $a, b \in M$  auch das Ergebnis  $a \circ b \in M$  ist. Es ist unmöglich, durch eine Verknüpfung  $\circ$  die Menge zu verlassen. Für das Skalarprodukt auf der

Menge der dreidimensionalen Vektoren gilt dies nicht denn z.B.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$  ist kein dreidimensionaler Vektor mehr.

### Aufgabe 3 (3)

Erkläre den Begriff des **neutralen** Elementes einer Verknüpfung. Welches ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation der  $2 \times 2$ -Matrizen?

Erkläre den Begriff des **inversen** Elementes einer Verknüpfung. Zeige, dass die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  zu sich selbst invers ist.

### Lösung:

Ein Element  $e \in M$  heißt neutrales Element bezüglich der Verknüpfung  $\circ$  auf  $M$ , wenn  $e \circ x = x \circ e = x$  für jedes  $x \in M$  gilt. Die **Einheitsmatrix**  $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation auf der

Menge der  $2 \times 2$ -Matrizen.

Ein Element  $x^{-1} \in M$  heißt inverses Element zu  $x \in M$ , wenn  $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$ , wobei  $e$  das neutrale Element ist. Für die gegebene Matrix gilt  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d.h., sie ist ihre eigene Inverse.