8.2. Aufgaben zu Körpern

Aufgabe 1
Vervollständige die folgende Tabelle:

K	$\circ$	n	Beispiel	a^{-1}	Beispiel
$\mathbb{Q}$	+	0	3 + 0 = 3	−a	3 + (−3) = 0
	$\cdot$	1	3·1 = 3	$\frac{1}{a}$	$3\cdot\frac{1}{3} = 1$
$\mathbb{C}$	+				
	$\cdot$	$(1\|0)$		$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\middle\|\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$	
Gl2	+				
	*	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$	

Aufgabe 2
Vervollständige die beiden Verknüpfungstafeln des Körpers der Reste modulo 7 und markiere die neutralen Elemente

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$							
$\bar{1}$							
$\bar{2}$							
$\bar{3}$							
$\bar{4}$							
$\bar{5}$				$\bar{1}$			
$\bar{6}$							

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$							
$\bar{1}$							
$\bar{2}$							
$\bar{3}$							
$\bar{4}$					$\bar{2}$		
$\bar{5}$							
$\bar{6}$							

Aufgabe 3
Begründe anhand der Verknüpfungstafeln, warum die Menge der Reste modulo 6 <u>kein</u> Körper ist:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						
$\bar{4}$						
$\bar{5}$				$\bar{2}$		

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						
$\bar{4}$					$\bar{4}$	
$\bar{5}$				$\bar{3}$		

Lösungen zu den Aufgaben zu Körpern

Aufgabe 1

K	$\circ$	n	Beispiel	a^{-1}	Beispiel
$\mathbb{Q}$	+	0	3 + 0 = 3	−a	3 + (−3) = 0
$\boldsymbol{\mathbb{Q}}$	·	1	3·1 = 3	$\frac{1}{a}$	$3\cdot\frac{1}{3} = 1$
$\mathbb{C}$	+	**(0|0)**	**(3|4) + (0|0) = (3|4)**	**(−a|−a)**	**(a|a) + (−a|−a) = (0|0)**
$\boldsymbol{\mathbb{C}}$	·	(1|0)	**(3|4) · (1|0) = (3|4)**	$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\middle\vert\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$	$\mathbf{(a\vert b)}\cdot\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a^2+b^2}}\middle\vert\frac{\mathbf{-b}}{\mathbf{a^2+b^2}}\right) = \mathbf{(1\vert 0)}$
Gl2	+	$\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{-a} & \mathbf{-b}\\ \mathbf{-c} & \mathbf{-d}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{-a} & \mathbf{-b}\\ \mathbf{-c} & \mathbf{-d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$
Gl2	*	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{-b}\\ \mathbf{b} & \mathbf{a}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

Aufgabe 2

+	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

·	$\overline{0}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Aufgabe 3

$\overline{2}$, $\overline{3}$ und $\overline{4}$ sind nicht teilerfremd zur 6 und besitzen daher kein inverses Element bezüglich der Multiplikation: Es gibt z.B. kein Element $\overline{2^{-1}}$ mit $\overline{2^{-1}}\cdot\overline{2} = \overline{1}$, was daran zu erkennen ist, dass die $\overline{1}$ in der entsprechenden Spalte oder Zeile der $\overline{2}$ nicht erscheint:

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

·	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$