8.2. Körper

Die **Multiplikation** ist eine Abkürzung für die Addition vieler gleich großer Zahlen: $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$. Aus dieser Verwandtschaftsbeziehung ergibt sich, dass die Multiplikation auf der um die entsprechenden inversen Elemente (d.h. Bruchzahlen) erweiterten Menge der **rationalen Zahlen** (allerdings mit Ausnahme der Null!) ebenfalls den **Gruppeneigenschaften** genügt und außerdem mit der zugrunde liegenden Addition **verträglich** ist: Das Produkt einer Summe und einer Zahl lässt sich als Summe der Produkte der Summanden mit der Zahl schreiben. Diese **Verträglichkeitsbedingung** ist das bekannte **Distributivgesetz** und die Grundlage für das Nebeneinander zweier verschiedener Verknüpfungen auf einer gemeinsamen Menge. Eine Menge, die für zwei verschiedene aber miteinander verträgliche Verknüpfungen Gruppeneigenschaften besitzt, nennt man **Körper** (engl. **Field**):

8.2.1. Definition:

Eine Menge K mit mindestens zwei Elementen heißt Körper, wenn auf ihr zwei Verknüpfungen Addition + und Multiplikation · mit den folgenden Eigenschaften definiert sind:

1. (K, +) ist eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 0 (additive Gruppe des Körpers)
2. $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem neutralen Element 1 (multiplikative Gruppe des Körpers)
3. Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

8.2.2. Beispiele:

1. Der Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$ mit der gewöhnliche Addition und Multiplikation ist der Prototyp aller Körper.

2. Der Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ mit den gleichen Rechenoperationen wie in 1. aber erweitert um die irrationalen, d.h. nicht durch Brüche darstellbaren Zahlen. Die irrationalen Zahlen lassen sich als nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen darstellen. Man kann anhand der Zahl der Variationsmöglichkeiten der Dezimaldarstellung zeigen, dass es viel mehr irrationale als rationale Zahlen gibt.

3. Der Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}; +; \cdot)$ wurde in 8.1. in Form seiner multiplikativen Gruppe vorgestellt. Er lässt sich als Menge der Paare reeller Zahlen $(x|y)$ mit der komponentenweisen Addition $(x_1|y_1) + (x_2|y_2) = (x_1 + x_2|y_1 + y_2)$ und der Multiplikation $(x_1|y_1) \cdot (x_2|y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2|x_1y_1 + x_2y_2)$ definieren. Das neutrale Element der Multiplikation ist $(1|0)$ und das inverse Element der komplexen Zahl $(x|y)$ ist $(x|y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\middle|\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

4. Der Körper Gl2 der speziellen 2×2-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wurde in 8.1. in Form seiner multiplikativen Gruppe vorgestellt. Das neutrale Element der Multiplikation ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und das inverse Element der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Die Addition von Matrizen wird komponentenweise definiert. Z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

5. Der Körper der Reste modulo 5 wurde ebenfalls in 8.1. in Form seiner additiven Gruppe vorgestellt. Er besteht aus den 4 Resten $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ und $\bar{4}$, die bei der Division durch 5 auftreten. Die Summe zweier Reste wird als der Rest der gewöhnlichen Summe der Reste definiert. Z.B. ist $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$, weil $2 + 3 = 5$ den Rest 0 besitzt. Entsprechend wird das Produkt zweier Reste als der Rest des gewöhnlichen Produktes der Reste definiert. Z.B. ist $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$, weil $2 \cdot 3 = 6$ den Rest 1 besitzt.

Übungen: Aufgaben zu Körpern Nr. 1 - 3:

8.2.3. Eigenschaften

Einige mehr oder weniger bekannte und einsichtige praktische Rechenregeln werden hier beispielhaft allein mit Hilfe der Körpereigenschaften bewiesen. Dabei seien a und b beliebige Elemente des Körpers (K + ·).

Satz vom Nullprodukt

$a\cdot 0 = 0$ für jedes $a \in K$.
Beweis

$$\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0 + 0 && \mid \text{0 ist das neutrale Element der Addition}\\
&= a\cdot 0 + a\cdot 0 + (-a\cdot 0) && \mid -a\cdot 0 \text{ ist das inverse Element des unbekannten Elementes } a\cdot 0\\
&= a(0 + 0) + (-a\cdot 0) && \mid \text{Distributivgesetz}\\
&= a\cdot 0 + (-a\cdot 0) && \mid \text{denn } 0 + 0 = 0\\
&= 0 && \mid -a\cdot 0 \text{ ist das inverse Element des unbekannten Elementes } a\cdot 0
\end{aligned}$$
qed.

Umkehrung des Satzes vom Nullprodukt
Wenn $a\cdot b = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.
Beweis

Wenn z.B. $a \neq 0$ ist, besitzt es ein inverses Element a^{-1} bezüglich der Multiplikation. Daraus folgt aber durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
b &= 1\cdot b && \mid \text{denn 1 ist neutrales Element der Multiplikation}\\
&= (a^{-1}\cdot a)\cdot b && \mid \text{denn } a^{-1}\cdot a = 1\\
&= a^{-1}\cdot(a\cdot b) && \mid \text{Assoziativgesetz}\\
&= a^{-1}\cdot 0 && \mid \text{wegen der Voraussetzung}\\
&= 0 && \mid \text{wegen des Satzes vom Nullprodukt}
\end{aligned}$$
qed.

Plus mal Minus gibt Minus
$a\cdot(-a) = -(a\cdot a)$
Beweis

$$\begin{aligned}
a\cdot(-a) &= a\cdot(-a) + 0 && \mid \text{0 ist das neutrale Element der Addition}\\
&= a\cdot(-a) + a\cdot a + -(a\cdot a) && \mid -(a\cdot a) \text{ ist das inverse Element von } a\cdot a \text{ bezüglich der Addition}\\
&= a\cdot((-a) + a) + -(a\cdot a) && \mid \text{Distributivgesetz}\\
&= a\cdot 0 + -(a\cdot a) && \mid (-a) \text{ ist das inverse Element von a bezüglich der Addition}\\
&= 0 + -(a\cdot a) && \mid \text{Satz vom Nullprodukt}\\
&= -(a\cdot a) && \mid \text{0 ist das neutrale Element der Addition}
\end{aligned}$$
qed.

Minus mal Plus gibt Minus
$(-a)\cdot a = -(a\cdot a)$
Beweis
Ergibt sich aus Minus mal Plus gibt Minus und der Kommutativität der Multiplikation.

Minus mal Minus gibt Plus
$(-a)\cdot(-a) = a\cdot a$
Beweis

$$\begin{aligned}
(-a)\cdot(-a) &= (-a)\cdot(-a) + 0 && \mid \text{0 ist das neutrale Element der Addition}\\
&= (-a)\cdot(-a) + a\cdot a + -(a\cdot a) && \mid -(a\cdot a) \text{ ist das inverse Element von } a\cdot a \text{ bezüglich der Addition}\\
&= (-a)\cdot(-a) + a\cdot a + (-a)\cdot a && \mid \text{Plus mal Minus gibt Minus}\\
&= (-a)\cdot(-a) + (-a)\cdot a + a\cdot a && \mid \text{Kommutativität der Addition}\\
&= (-a)\cdot((-a) + a) + a\cdot a && \mid \text{Distributivgesetz}\\
&= a\cdot 0 + a\cdot a && \mid (-a) \text{ ist das inverse Element von a bezüglich der Addition}\\
&= 0 + a\cdot a && \mid \text{Satz vom Nullprodukt}\\
&= a\cdot a && \mid \text{0 ist das neutrale Element der Addition}
\end{aligned}$$
qed.