8.3. Aufgaben zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1
Versuche mit Hilfe der Addition oder Subtraktion mit ∞ einen Widerspruch herzuleiten.

Aufgabe 2

a) Berechne die ersten 5 Glieder der Folge (a_n) mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{2}{a_n} + a_n)$ und $a_0 = 2$.

b) Berechne die Abweichung $|a_5^2 - 2|$ nach den ersten 5 Gliedern.

c) Für welche n ist die Abweichung $|a_n^2 - 2| < 0{,}00\,1$?

d) Gib die Rekursionsformel für eine Folge rationaler Zahlen (b_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{5}$ an und berechne die ersten 5 Glieder.

Aufgabe 3

a) Gib die neutralen Elemente für die Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen an.

b) Gib die inversen Elemente $-z$ und z^{-1} für die komplexe Zahl $z = a + bi$ bezüglich die Addition und Multiplikation an.

Aufgabe 4
Berechne die folgenden Ausdrücke für $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$ und $z_3 = -2 + 3i$

a) $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$ und $z_2 \cdot z_3$

c) $\frac{1}{z_1}$ und $\frac{1}{z_2}$

d) $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_2}{z_3}$

Aufgabe 5
Berechne die Wurzeln $\sqrt{i}$, $\sqrt{3+4i}$ und $\sqrt{4-3i}$ nach der folgenden Anleitung und mache die **Probe**: $w = c + di$ ist die Wurzel von $z = a + bi$, wenn $w = \sqrt{z} \Leftrightarrow w^2 = z \Leftrightarrow (c + di)^2 = a + bi \Leftrightarrow c^2 - d^2 + 2cdi = a + bi$. Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sie im Realteil **und** im Imaginärteil übereinstimmen. Für den Realteil erhält man die Gleichung $c^2 - d^2 = a$ und für den Imaginärteil die Gleichung $2cd = b \Leftrightarrow d = \frac{b}{2c}$. Durch Einsetzen in die Gleichung für den Realteil ergibt sich $c^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2 = a \Leftrightarrow c^4 - \frac{1}{4}b^2 = ac^2 \Leftrightarrow c^4 - ac^2 - \frac{1}{4}b^2 = 0$. Mit der p-q-Formel erhält man die Lösung $c^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + b^2})$ und $d^2 = c^2 - a = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + b^2})$. Wegen $c^2 > 0$ bzw. $d^2 > 0$ kommen nur die Pluszeichen in Betracht und man erhält $c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}$ und $d = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}$. Die Vorzeichenkombinationen $\pm$ müssen noch durch Einsetzen ermittelt werden. Die Wurzeln von $z = a + bi$ mit $b > 0$ sind dann $\pm\sqrt{z} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}\right)$. Für $b < 0$ muss auch $d < 0$ gewählt werden und das + vor dem Imaginärteil durch − ersetzt werden. Dieses Ergebnis ist etwas unbefriedigend, da es einerseits sehr kompliziert und andererseits aber sehr regelmäßig erscheint. Es müsste sich irgendwie einfacher ausdrücken lassen. Eine deutliche Vereinfachung dieser Wurzelberechnung gelingt tatsächlich mit Hilfe der **Polarform** in der **komplexen Zahlenebene** in Abschnitt 8.4.

Aufgabe 6
Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$ und führe die **Probe** durch.

a) $z^2 + 3 = 1$
b) $z^2 + 2z + 5 = 0$
c) $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$
d) $z^2 - 2iz + 3 = 0$
e) $z^2 - (2 + 2i)z - 4 + 2i = 0$
f) $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$

Lösungen zu den Aufgaben zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1

z.B. $0 = \infty - \infty = 2\cdot\infty - \infty = \infty + \infty - \infty = \infty - 0 = \infty$.

Aufgabe 2

a) $a_0 = 2$; $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = \frac{17}{12}$; $a_3 = \frac{577}{408}$ und $a_5 = \frac{665857}{470832} \approx 1{,}414213562$

b) $|a_5^2 - 2| < 10^{-10}$ (mit dem TR nicht mehr erfassbar!)

c) $a_2^2 \approx 2{,}007$ und $a_3^2 \approx 2{,}000006 \Rightarrow$ Für $n \geq 3$ ist die Abweichung kleiner als 0,001

d) $b_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{5}{b_n} + b_n)$ und $b_0 = 5 \Rightarrow b_1 = 3$, $b_2 = \frac{7}{3}$, $b_3 = \frac{47}{21}$ mit $b_3^2 = 5{,}009$, $b_4 = \frac{2207}{987}$ mit $b_4^2 \approx 5{,}000004$ und $b_5 = \frac{4870847}{2178309} \approx 2{,}236067977$ mit $b_5^2 = 5 \pm 10^{-10}$ (Genauigkeit der TR-Anzeige) $\Rightarrow$ Für $n \geq 4$ ist die Abweichung kleiner als 0,001.

Aufgabe 3

a) Wegen $0 + z = z$ und $1\cdot z = z$ bleiben die Rollen der Null und der Eins unverändert erhalten!

b) Für $z = a + bi$ sind die Gegenzahl $-z = -a - bi$ und der Kehrwert $z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$.

Aufgabe 4

a) $z_1 + z_2 = 4 - 2i$ und $z_1 - z_2 = -2 + 6i$ $\qquad z_1 = 1 + 2i$

b) $z_1\cdot z_2 = 11 + 2i$ und $z_2\cdot z_3 = 6 + 21i$

c) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ und $\frac{1}{z_2} = \frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$.

d) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$ und $\frac{z_2}{z_3} = -\frac{18}{13} - \frac{i}{13}$

Aufgabe 5

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$; $\sqrt{3+4i} = \pm(2 + i)$ und $\sqrt{4-3i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3 - i)$.

Aufgabe 6

Berechne die Lösungen der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $\mathbb{C}$.

a) $z^2 + 3 = 1 \Leftrightarrow z^2 = -2 \Rightarrow z_{1/2} = \pm\sqrt{2}\, i$

b) $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = -1 \pm 2i$

c) $z^4 + 5z^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 2)(z^2 + 3) = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \pm\sqrt{2}\, i$ und $z_{3/4} = \pm\sqrt{3}\, i$

d) $z^2 - 2iz + 3 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = i \pm 2i$

e) $z^2 - (2 + 2i)z - 4 + 2i = 0 \Rightarrow z_{1/2} = 1 + i \pm 2 \Rightarrow z_1 = -1 + i$ und $z_2 = 3 + i$.

f) $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0 \Rightarrow z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2i} = 2 \pm (1 + i) \Rightarrow z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 1 + i$.