8.4. Prüfungsaufgaben zur komplexen Zahlenebene

Aufgabe 1: Rechengesetze

a) Nenne und erkläre die Kommutativ- Assoziativ- und Distributivgesetz für Addition und Multiplikation reeller Zahlen.
b) Warum gelten diese Rechengesetze auch für komplexe Zahlen? Formuliere ein Beispiel.
c) Welches dieser Gesetze gilt nicht allgemein für Matrizen? Formuliere ein einfaches Beispiel.

Aufgabe 2: Koordinatenform und Polarform

Bestimme die Koordinatenform und die Polarform von $\frac{1}{2+i}$

a) ausgehend von der Koordinatenform von 2 + i
b) ausgehend von der Polarform von 2 + i

und beschreibe den Vorgang der Inversenbildung geometrisch mit Hilfe eines Zeigerdiagramms.

Aufgabe 2: Koordinatenform und Polarform

a) $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5} \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \text{cis}(-26{,}6°)$

b) $\frac{1}{2+i} = (2 + i)^{-1} = [\sqrt{5} \cdot \text{cis}(26{,}6°)]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \text{cis}(-26{,}6°) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \text{cis}(-26{,}6°)$

Inversenbildung bedeutet Invertierung des Betrages und Vorzeichenwechsel beim Winkel.

Aufgabe 3: Potenzen

Welche Figur erhält man im Zeigerdiagramm aus den Potenzen

a) der Zahlen z = 2 + i
b) der Zahlen $\frac{z}{|z|} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} i$?

Berechne dazu z^2 und z^3 und stelle sie im Zeigerdiagramm dar.

Aufgabe 3: Potenzen

$z \approx \sqrt{5} \cdot \text{cis}(18{,}4°) \Rightarrow z^2 = 3 + 4i \approx 5 \cdot \text{cis}(36{,}8°)$ und $z^3 = 2 + 11i \approx 5\sqrt{5} \cdot \text{cis}(54{,}2°)$. Man erhält eine Spirale.

Problem 4: complex numbers (10)

Given are the complex numbers $z_1 = 1 + 2i$ and $z_2 = 2 + i$.

a) **Calculate** the modulus and the argument of z_1 and z_2. (2)
b) **Calculate** the cartesian and polar forms of the sum $z_1 + z_2$ and the difference $z_1 – z_2$. (4)
c) z_1 and z_2 define a parallelogram in the complex plane. Draw this parallelogram and fit the sum $z_1 + z_2$ and the difference $z_1 – z_2$ also into this parallelogram. Which geometric meaning have the lines of $z_1 + z_2$ and $z_1 – z_2$ in this parallelogram? (2)
d) **Calculate** the cartesian and polar forms of the product $z_1 \cdot z_2$ and the quotient $\frac{z_1}{z_2}$. (2)
e) What happens with the modulus and the argument oft two complex numbers when they are multiplied? (1)
f) What happens with the modulus and the argument oft two complex numbers when they are divided? (1)

Solutions:

a) $|z_1| = \sqrt{1^2 + 2^2}$ and $\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) \approx 63{,}43° \Rightarrow z_1 = \sqrt{5}\, e^{i \cdot 63{,}43°}$ and likewise $z_2 = \sqrt{5}\, e^{i \cdot 26{,}56°}$ (2)

b) $z_1 + z_2 = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\, e^{i \cdot 45°}$ and $z_1 - z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{i \cdot 135°}$.
(2)

c) Drawing and commentary: Sum and difference are the **diagonals** of the parallelogram. (2)

d) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\, e^{i \cdot (63{,}43° + 26{,}56°)} = 5e^{i90°} = 5i$ und $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{5} : \sqrt{5}\, e^{i \cdot (63{,}43° - 26{,}56°)} = 1e^{i36{,}97°} = 0{,}8 + 0{,}6i$ (2)

e) The moduli are multiplied and the arguments are added together. (1)
f) The moduli are divided and the arguments are subtracted . (1)

Problem 5: Powers of complex numbers (14)

a) Write $z = 1 + i\sqrt{3}$ in polar form and hence find the polar and coordinate forms of z^{10}. (2)

b) Write $z = 1 - i\sqrt{3}$ in polar form and hence find the polar and coordinate forms of z^{10}. (2)

c) Write $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$ in polar form and hence find the polar and coordinate forms of z^2.
Then use Euler's identity to prove $\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2$ and $\sin(2\alpha) = 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$. (4)

d) Write $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$ in polar form and hence find the polar and coordinate forms of z^3.
Then use Euler's identity to prove $\cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3\cdot\cos(\alpha)\cdot(\sin(\alpha))^2$ and $\sin(3\alpha) = 3\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3$. (6)

Problem 5: Powers of complex numbers (14)

a) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\cdot\text{cis}(60°) \Rightarrow z^{10} = 2^{10}\cdot\text{cis}(600°) = 1024\cdot\text{cis}(240°) = 1024\cdot\text{cis}(-60°) = 1024 - i1024\sqrt{3}$. (2)

b) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\cdot\text{cis}(-60°) \Rightarrow z^{10} = 2^{10}\cdot\text{cis}(-600°) = 1024\cdot\text{cis}(-240°) = 1024\cdot\text{cis}(60°) = 1024 + i1024\sqrt{3}$. (2)

c) $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha) = 1\cdot\text{cis}(\alpha) \Rightarrow z^2 = 1\cdot\text{cis}(2\alpha) = \cos(2\alpha) + i\cdot\sin(2\alpha)$ (1)
With the binomial theorem we also get $z^2 = (\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^2 = (\cos(\alpha))^2 + i\cdot2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^2$. (1)
Since the real parts must be equal we get $\cos(2\alpha) = (\cos(\alpha))^2 - (\sin(\alpha))^2$. (1)
Since the imaginary parts must be equal too we get $\sin(2\alpha) = 2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$. (1)

d) $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha) = 1\cdot\text{cis}(\alpha) \Rightarrow z^3 = 1\cdot\text{cis}(3\alpha) = \cos(3\alpha) + i\cdot\sin(3\alpha)$ (1)
With the binomial theorem $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ we also get (1)
$z^3 = (\cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha))^3 = (\cos(\alpha))^3 + i\cdot3\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\sin(\alpha) - 3\cdot\cos(\alpha)\cdot(\sin(\alpha))^2 - i\cdot(\sin(\alpha))^3$. (2)
Since the real parts must be equal we get $\cos(3\alpha) = (\cos(\alpha))^3 - 3\cdot\cos(\alpha)\cdot(\sin(\alpha))^2$. (1)
Since the imaginary parts must be equal too we get $\sin(3\alpha) = 3\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\sin(\alpha) - (\sin(\alpha))^3$. (1)

Problem 6: Powers of complex numbers (4)
If $z = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)$ show that

a) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cdot\cos(n\cdot\alpha)$

b) $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\cdot\sin(n\cdot\alpha)$.

Problem 6: Powers of complex numbers (8)
Using $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$ and $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$ and the polar forms one gets

a) $z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + z^{-n}$ (1)
$= \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha) + \cos(-n\alpha) + i\cdot\sin(-n\alpha)$ (1)
$= \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) - i\cdot\sin(n\alpha)$ (1)
$= 2\cdot\cos(n\cdot\alpha)$ (1)

b) $z^n - \frac{1}{z^n} = z^n - z^{-n}$ (1)
$= \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha) - [\cos(-n\alpha) + i\cdot\sin(-n\alpha)]$ (1)
$= \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha) - \cos(n\alpha) + i\cdot\sin(n\alpha)$ (1)
$= 2i\cdot\sin(n\cdot\alpha)$. (1)

Aufgabe 7a: Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Bestimme das Quadrat z^2 und die Wurzel $\sqrt{z}$ von $z = 1 + i$ jeweils in Koordinatenform und Polarform. Stelle die drei Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar. Welche Figur erhält man, wenn man das Quadrieren und das Radizieren immer weiter fortsetzt?

Aufgabe 7a: Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

$z = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(45°) \Rightarrow z^2 = 2i = 2\cdot\text{cis}(90°)$ und $\sqrt{z} = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(22{,}5°)$. Man erhält Spiralen, die beim Quadrieren herauslaufen und beim Radizieren hineinlaufen

Aufgabe 7b: Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

a) Bestimme das Quadrat z^2 und die Wurzel $\sqrt{z}$ von $z = \frac{3}{2} + 2i$ jeweils in Koordinatenform und Polarform.

b) Stelle die drei Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar.

c) Welche Figur erhält man, wenn man das Quadrieren und das Radizieren immer weiter fortsetzt?

Problem 7b: Powers and Roots of complex numbers (9)

a) Determine the cartesian form and the polar form of the square z^2 and the squareroot $\sqrt{z}$ of $z = \frac{3}{4} + i$. (4)
b) Draw the three numbers from a) in the complex plane. (3)
c) Which kind of shape evolves if the process of taking powers or roots is taken further? (2)

Solutions:

a) $z = \frac{3}{4} + i = \frac{5}{4} \cdot cis(53{,}13°) \Rightarrow z^2 = \frac{25}{16} \cdot cis(106.26°) = -\frac{7}{4} + 6i$ and $\sqrt{z} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot cis(26{,}6°) = 1 + \frac{1}{2}i$. (4)
b) Drawing (3)
c) powers result in outgoing spiral, roots form an ingoing spiral (2)

Aufgabe 8: Wurzeln und quadratische Gleichungen (8)
a) Berechne die Lösungen der Gleichung $z^2 = 3 + 4i$ sowohl in kartesischer als auch in Polarform und zeichne sie in ein Koordinatensystem ein. (4)
b) Beschreibe die Berechnung von komplexen Wurzeln in Polarform anhand der Zeichnung aus a) in Worten. (2)
c) Berechne die Lösungen der Gleichung $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$ (2)

Lösungen
a) $z_1 = \sqrt{3+4i} = \sqrt{5 \cdot cis(53{,}13°)} = \sqrt{5} \cdot cis(26{,}57°) = 2 + i$ (1)
$z_2 = -\sqrt{3+4i} = -\sqrt{5 \cdot cis(53{,}13°)} = \sqrt{5} \cdot cis(206{,}57°) = -2 - i$ (1)
Skizze. (2)
b) Der Betrag wird radiziert und das Argument wird halbiert. (2)
c) $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -3 - i$. (2)

Problem 8: Quadratic equations (8)
a) Determine the coordinate forms and the polar forms of the solutions of $z^2 = 3 + 4i$ and plot them on an Argand diagram. (4)
b) What happens to the modulus and the argument of a complex number, when its root is taken? (2)
c) Find all solutions of $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$ (2)

Problem 8 (8)
a) $z_1 = \sqrt{3+4i} = \sqrt{5 \cdot cis(53{,}13°)} = \sqrt{5} \cdot cis(26{,}57°) = 2 + i$ (1)
$z_2 = -\sqrt{3+4i} = -\sqrt{5 \cdot cis(53{,}13°)} = \sqrt{5} \cdot cis(206{,}57°) = -2 - i$ (1)
Drawing. (2)
b) The root of the modulus is taken and the argument is divided by two. (2)
c) $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -3 - i$. (2)

Problem 9: Quadratic equations on the universal set $\mathbb{C}$ (5)
Solve the following equations. Give exact results and simplify as far as possible.
a) $z^2 - z - 1 + 3i = 0$
b) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$
c) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$
d) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 - 5i = 0$

Problem 9: Quadratic equations on the universal set $\mathbb{C}$ (5)
a) $z^2 - z - 1 + 3i = (z + 1 - i)(z - 2 + i) \Rightarrow z_1 = -1 + i$ and $z_2 = 2 - i$.
b) $z^2 - 3z + 3 - i = (z - 1 + i)(z - 2 - i) \Rightarrow z_1 = 1 - i$ and $z_2 = 2 + i$.
c) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = (z + 1 - 2i)(z - 3 + i) \Rightarrow z_1 = -1 + 2i$ and $z_2 = 3 - i$.
d) $z^2 + (-3 + 2i)z + 5 - 5i = (z - 2 - i)(z - 1 + 3i) \Rightarrow z_1 = 2 + i$ and $z_2 = 1 - 3i$.

Aufgabe 10: höhere Wurzeln komplexer Zahlen
Welche Figur erhält man im Zeigerdiagramm aus den Wurzeln der Zahl −4? Berechne dazu $\sqrt[2]{-4}$, $\sqrt[3]{-4}$ sowie $\sqrt[4]{-4}$ und stelle sie im Zeigerdiagramm dar.

Aufgabe 10: höhere Wurzeln komplexer Zahlen
$\sqrt[2]{-4} = 2i$; $\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4} \cdot cis(60°) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}(1 + i\sqrt{3})$ und $\sqrt[4]{-4} = \sqrt{2} \cdot cis(45°) = 1 + I \Rightarrow$ Man erhält eine Spirale.

Aufgabe 11a: Potenzgleichungen in $\mathbb{C}$

a) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$ und stelle sie in einem Zeigerdiagramm dar.

b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$ und stelle sie in einem Zeigerdiagramm dar.

Aufgabe 11a: Potenzgleichungen in $\mathbb{C}$

a) $-1 - i\sqrt{3} = 2\cdot\text{cis}(-120°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(-30°)$; $z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(-120°)$; $z_3 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(150°)$ und $z_4 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(60°)$.

b) $-1 + i\sqrt{3} = 2\cdot\text{cis}(120°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(30°)$; $z_2 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(120°)$; $z_3 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(-150°)$ und $z_4 = \sqrt[4]{2}\cdot\text{cis}(-60°)$;

Problem 11b: Roots of complex numbers

Give the cartesian form and the polar form of all possible solutions for the following equations:

a) $z^3 = 1 – i$ b) $z^3 = 3 – 5i$ c) $z^4 = 3 + 4i$ d) $z^5 = -5 – 12i$ e) $z^6 = \sqrt{3} + i$

Solutions:

a) $z^3 = 1 – i = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(-45°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(-135°) \approx -0{,}79 – 0{,}79i$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(-15°) \approx 1{,}08 - 0{,}29i$ and $z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(105°) \approx -0{,}29 + 1{,}08i$

b) $z^3 = 3 – 5i \approx \sqrt{34}\cdot\text{cis}(-59{,}0°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{34}\cdot\text{cis}(-19{,}7°) \approx 1{,}69 – 0{,}61i$, $z_2 \approx \sqrt[6]{34}\cdot\text{cis}(100{,}3°) \approx -0{,}32 + 1{,}77i$ and $z_3 \approx \sqrt[6]{34}\cdot\text{cis}(-139{,}7°) \approx -1{,}37 – 1{,}16i$

c) $z^4 = 3 + 4i = 5\cdot\text{cis}(53{,}1°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{5}\cdot\text{cis}(13{,}3°) \approx 1{,}456 + 0{,}347i$; $z_2 = \sqrt[4]{5}\cdot\text{cis}(103{,}3°) \approx -0{,}347 + 1{,}456i$; $z_3 = \sqrt[4]{5}\cdot\text{cis}(-166{,}7°) \approx -1{,}456 - 0{,}347i$ and $z_4 = \sqrt[4]{5}\cdot\text{cis}(-76{,}7°) \approx 0{,}347 – 1{,}456i$

d) $z^5 = -5 – 12i \approx 13\cdot\text{cis}(-157{,}4°) \Rightarrow z_1 \approx \sqrt[5]{13}\cdot\text{cis}(-31{,}5°) \approx 1{,}54 – 0{,}64i$; $z_2 \approx \sqrt[5]{13}\cdot\text{cis}(-103{,}5°) \approx -0{,}132 – 1{,}67i$; $z_3 \approx \sqrt[5]{13}\cdot\text{cis}(-175{,}5°) \approx -1{,}62 – 0{,}389i$; $z_4 \approx \sqrt[5]{13}\cdot\text{cis}(112{,}5°) \approx -0{,}872 + 1{,}42i$ and $z_5 \approx \sqrt[5]{13}\cdot\text{cis}(40{,}5°) \approx 1{,}27 + 1{,}09i$

e) $z^6 = \sqrt{3} + i = 2\cdot\text{cis}(30°) \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(5°) \approx 1{,}11 + 0{,}10i$; $z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(65°) \approx 0{,}47 + 1{,}02i$; $z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(125°) \approx -0{,}64 + 0{,}92i$; $z_4 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(-175°) \approx -1{,}12 + 0{,}10i$; $z_5 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(-115°) \approx -0{,}47 -1{,}02i$ and $z_6 = \sqrt[6]{2}\cdot\text{cis}(-55°) \approx 0{,}64 -0{,}92i$.

Problem 12: Roots of complex numbers (8)

Consider $z^6 = 64$.

a) Find the polar form of the root z_1 to this equation which has the smallest positive argument. (1)

b) Find the powers z_1^2, z_1^3, z_1^4, z_1^5 and z_1^6 in polar form and plot them on an Argand diagram. (5)

c) The point z_1^n is mapped to z_1^{n+1} by a composition of two linear transformations. Describe these transformations. (2)

Problem 12: Roots of complex numbers (8)

a) $z_1 = 2\cdot\text{cis}(60°)$. (1)

b) $z_1^2 = 4\cdot\text{cis}(120°)$; $z_1^3 = 8\cdot\text{cis}(180°) = 8i$; $z_1^4 = 16\cdot\text{cis}(240°)$; $z_1^5 = 32\cdot\text{cis}(300°)$ and $z_1^6 = 64\cdot\text{cis}(360°) = 64$ (3)

Argand diagram: outgoing spiral counterclockwise direction. (2)

c) The point z_1^n is mapped to z_1^{n+1} by

rotation counterclockwise by 60° with center O and (1)

enlargement with factor 2 with center O. (1)

Problem 13: Powers and Roots of complex numbers (6)

Given that ω is a complex cube root of unity, $\omega^3 = 1$ and$1+ \omega + \omega^2 = 0$. simplify each of the expressions $1 + 3\omega + \omega^2$ and $1 + \omega + 3\omega^2$ and find the product and the sum of these two expressions.

Problem 13: Powers and Roots of complex numbers (6)

$1 + 3\omega + \omega^2 = (1 + \omega + \omega^2) + 2\omega = 0 + 2\omega = 2\omega$ and $1 + \omega + 3\omega^2 = (1 + \omega + \omega^2) + 2\omega^2 = 0 + 2\omega^2 = 2\omega^2$ (2)

Product: $(1 + 3\omega + \omega^2)\cdot(1 + 3\omega + \omega^2) = 2\omega\cdot2\omega^2 = 4\omega^3 = 4$ (2)

Sum: $(1 + 3\omega + \omega^2) + (1 + 3\omega + \omega^2) = 2\omega + 2\omega^2 = 2(\omega + \omega^2) = 2(1 + \omega + \omega^2 – 1) = 2(0 – 1) = -2$ (2)

Aufgabe 14: Drehmatrizen und komplexe Zahlen

Erkläre die Analogie zwischen Drehmatrizen und komplexen Zahlen am Beispiel von $z = 4 + 3i$. Bestimme zunächst die Polarform und die entsprechende Drehmatrix von z und erkläre dann ihre „Wirkung" auf andere komplexe Zahlen bzw. Drehmatrizen.

Lösungen

$z = 5\cdot\text{cis}(53{,}13°)$ bewirkt Drehstreckung bei Multiplikation ebenso wie die entsprechende Drehmatrix $5\cdot D_{53,13°} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15: Drehmatrizen und komplexe Zahlen

a) Nenne und erkläre die Wirkung einer Drehmatrix am Beispiel der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ für den Winkel α = 30° anhand einer Skizze

b) Erkläre mit Hilfe des Distributivgesetzes und der ergänzten Skizze aus a), warum die Drehmatrix auch bei dem Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ auf die gleiche Art wirkt.

Aufgabe 16: Drehmatrizen und komplexe Zahlen (5)

Gegeben sind die Matrizen $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ und $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

a) Berechne die Summe A + B. (1)
b) Berechne die Produkte A * B und B * A. (2)
c) Welches Rechengesetz ist nach dem Ergebnis aus b) für die Matrizenmultiplikation nicht erfüllt? (1)
d) Welche der Matrizen ist eine Drehmatrix und lässt sich als komplexe Zahl darstellen? Bestimme ihren Drehwinkel. (1)

Lösungen

a) $A + B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1\\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1\end{pmatrix}$ (1)

b) $A * B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ und $B * A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (2)

c) Das Kommutativgesetz ist offensichtlich nicht erfüllt (1)

d) B ist eine Drehmatrix D_α mir $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$. (1)

Aufgabe 17: Drehmatrizen und komplexe Zahlen (5)

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Berechne die Summe A + B. (1)
b) Berechne die Produkte A * B und B * A. (1)
c) Welches Rechengesetz ist nach dem Ergebnis aus b) für die Matrizenmultiplikation nicht erfüllt? (1)
d) Welche der Matrizen ist eine Drehstreckmatrix und lässt sich als komplexe Zahl darstellen? Gib ihre kartesische und ihre Polarform an. (2)

Lösungen

a) $A + B = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (1)

b) $A * B = \begin{pmatrix}-1 & 7\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ und $B * A = \begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & -5\end{pmatrix}$ (1)

c) Das Kommutativgesetz ist offensichtlich nicht erfüllt (1)

d) B lässt sich als komplexe Zahl $z = 2 - i = \sqrt{5} \cdot e^{-i26{,}6°}$ darstellen. (2)

Aufgabe 18: Drehmatrizen und komplexe Zahlen (4)

a) Formuliere die Definition der Wurzel einer reellen Zahl und übertrage diese Definition auf Matrizen. (1)

b) Berechne die Wurzel der Matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ mit und ohne Verwendung komplexer Zahlen unter der Annahme, dass die Wurzel B eine Drehmatrix A auch wieder eine Drehmatrix ist. (3).

Lösungen

a) Die Wurzel einer Matrix A ist diejenige Matrix B, deren Quadrat wieder A ergibt: $B^2 = A$. (1)

b) Für $B = \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ muss gelten $B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ (1)

Aus $a^2 - b^2$ 0 folgt $a = \pm b$ und aus $2ab = 2 \Leftrightarrow ab = 1$ folgt weiter $a = b = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ (1)

Die Wurzel der entsprechenden komplexen Zahl a = 2i ist $b = \sqrt{a} = 1 + i$ und entspricht der Drehmatrix B. (1)

Aufgabe 19: Additionstheoreme und Drehmatrizen (12)

a) Zeige an einem selbst gewählten Beispiel, dass die Multiplikation zweier 2x2-Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist. (2)
b) Erkläre genau, was eine Drehmatrix bewirkt und erkläre das Assoziativgesetz am Beispiel der Verknüpfung zweier Drehmatrizen. (2)
c) Beweise **nur mit Hilfe der Eigenschaften aus b),** dass die Multiplikation zweier Drehmatrizen immer kommutativ ist. (2)
d) Beweise die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus mit Hilfe einer Matrizenmultiplikation. (5)
e) Beweise das Kommutativgesetz für Drehmatrizen erneut mit Hilfe der Rechnung aus d). (1)

Lösungen (12):

a) Z.B. mit A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = A * B ≠ B * A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2)

b) Für eine beliebigen Vektor $\vec{v}$ ist das Produkt $D_\alpha*\vec{v}$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn gedreht. (0,5)
Nochmalige Multiplikation mit D_β zu $D_\beta*(D_\alpha*\vec{v})$ bewirkt eine zusätzliche Drehung um den Winkel β. (0,5)
Nach dem Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation ist $D_\beta*(D_\alpha*\vec{v}) = (D_\beta*D_\alpha)*\vec{v}$. (0,5)
Die Multiplikation mit dem Produkt $D_\beta*D_\alpha$ bewirkt also ebenfalls eine Drehung erst um α und dann um β (0,5)

c) Die gleiche Wirkung hat die die Drehung in umgekehrter Reihenfolge: $D_\beta*(D_\alpha*\vec{v}) = D_\alpha*(D_\beta*\vec{v})$. (0,5)
Wieder nach dem Assoziativgesetz gilt $D_\alpha*(D_\beta*\vec{v}) = (D_\alpha*D_\beta)*\vec{v}$. (0,5)
Insgesamt gilt also $(D_\beta*D_\alpha)*\vec{v} = (D_\alpha*D_\beta)*\vec{v}$ für beliebige Vektoren $\vec{v}$ und damit auch $D_\beta*D_\alpha = D_\alpha*D_\beta$.(1)
(Oder direkte Berechnung wie in c))

d) Multiplikation erst mit D_α und dann mit D_β bewirkt Drehung erst um α und dann um β.
Die gleiche Wirkung erzielt man durch Multiplikation mit $D_{\alpha+\beta}$. Es gilt also $D_\alpha*(D_\beta*\vec{v}) = D_{\alpha+\beta}*\vec{v}$. (1)
Nach dem Assoziativgesetz gilt $(D_\alpha*D_\beta)*\vec{v} = D_\alpha*(D_\beta*\vec{v})$. (1)
Für beliebige Vektoren $\vec{v}$ gilt also $(D_\alpha*D_\beta)*\vec{v} = D_{\alpha+\beta}*\vec{v}$ und damit $D_\alpha*D_\beta = D_{\alpha+\beta}$.
Einsetzen ergibt weiter $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. (1)
Ausmultiplikation der linken Seite ergibt $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{pmatrix}$. (1)
Durch Vergleich folgt $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ (1)

e) Aus dem Kommutativgesetz der Addition folgt $D_\alpha*D_\beta = D_{\alpha+\beta} = D_{\beta+\alpha} = D_\beta*D_\alpha$. (1)

Aufgabe 20: Additionstheoreme und Drehmatrizen

Beweise die Additionstheoreme $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)$ mit Hilfe der Multiplikation zweier Drehmatrizen.

Lösung: (5)

Multiplikation erst mit D_α und dann mit D_β bewirkt Drehung erst um α und dann um β.
Die gleiche Wirkung erzielt man durch Multiplikation mit $D_{\alpha+\beta}$. Es gilt also $D_\alpha*(D_\beta*\vec{v}) = D_{\alpha+\beta}*\vec{v}$. (1)
Nach dem Assoziativgesetz gilt $(D_\alpha*D_\beta)*\vec{v} = D_\alpha*(D_\beta*\vec{v})$. (1)
Für beliebige Vektoren $\vec{v}$ gilt also $(D_\alpha*D_\beta)*\vec{v} = D_{\alpha+\beta}*\vec{v}$ und damit $D_\alpha*D_\beta = D_{\alpha+\beta}$.
Einsetzen ergibt weiter $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. (1)
Ausmultiplikation der linken Seite ergibt $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{pmatrix}$. (1)
Durch Vergleich folgt $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ und $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ (1)