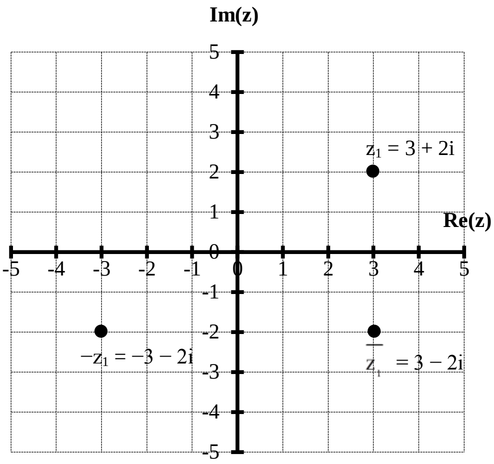
8.4. Die komplexe Zahlenebene

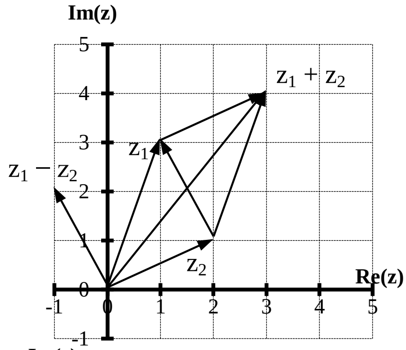
8.4.1. Kartesische Form und Addition komplexer Zahlen



Jede komplexe Zahl z = x + yi besteht aus zwei Komponenten Re(z) = x und Im(z) = y und lässt sich daher als **Punkt** (x|y) in der **komplexen Zahlenebene** darstellen. (**Kartesische Darstellung** nach René Descartes 1596 - 1650, dem Erfinder des rechtwinkligen Koordinatensystems)

Die x-Achse wird zur **reellen Achse**, auf der alle reellen Zahlen x + 0i liegen und die y-Achse zur **imaginären Achse**, auf der alle rein imaginären Zahlen 0 + yi liegen.

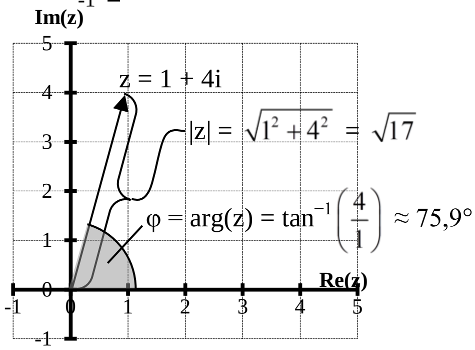
Aus z erhält man die **Gegenzahl** −z durch **Spiegelung am Ursprung** und das **komplex konjugierte Element** $\bar{z}$ durch **Spiegelung an der reellen Achse**.



Die komponentenweise **Addition** komplexer Zahlen entspricht dem **Hintereinanderlegen** der entsprechenden **Ortsvektoren**.
Bei der **Subtraktion** wird die Pfeilrichtung des Subtrahenden umgedreht: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.
Durch Addition und Subtraktion erhält man so die beiden **Diagonalen** des von z_1 und z_2 aufgespannten **Parallelogramms:**

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 1

8.4.2. Polarform komplexer Zahlen

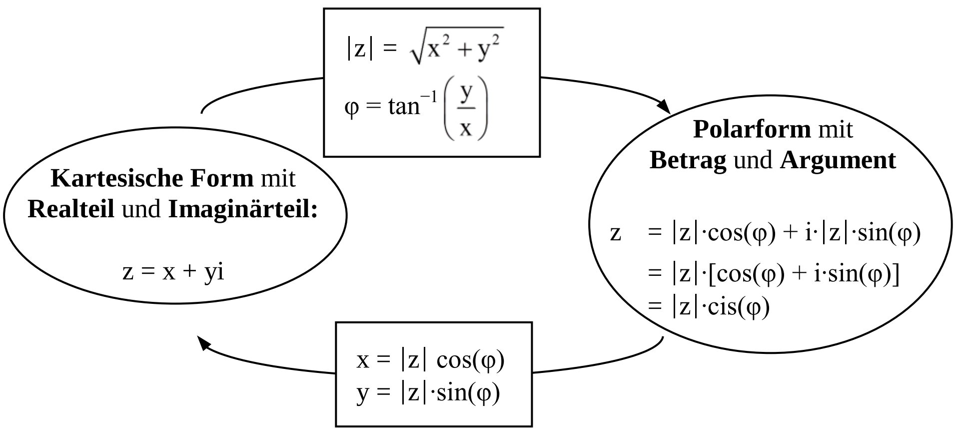


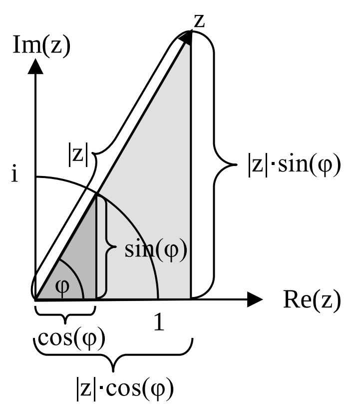
Der **Betrag** einer komplexen Zahl z = x + yi ist die Länge ihres Ortsvektors und berechnet sich nach **Pythagoras** zu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Das **Argument** einer komplexen Zahl z = x + yi ist definiert als der Winkel φ zwischen ihrem Ortsvektor und der positiven reellen Achse. Es lässt sich daher mit dem **Tangens** berechnen zu $\varphi = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 2 und 3

Eine komplexe Zahl z lässt sich damit auf zwei verschiedene Arten eindeutig beschreiben:





Zur Abkürzung verwendet man dabei die **trigonometrische Summe** cis(φ) = cos(φ) + i·sin(φ). Das Argument φ = arg(z) bezieht sich auf einen **einfachen Umlauf in positiver Richtung** und ist daher zunächst (vgl. 8.3.4) beschränkt auf den Bereich $0 \le \varphi < 2\pi$. Es kann sowohl in **Grad** als auch im **Bogenmaß** angegeben werden.

Beispiele für die Umrechnung kartesische Form → Polarform:

1. $z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ und $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}3° \Rightarrow z \approx \sqrt{13}\cdot\text{cis}(56{,}3°)$
2. $z = 4 - 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ und $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) \approx -36{,}9° \Rightarrow z \approx 5\cdot\text{cis}(-36{,}9°) = 5\cdot\text{cis}(323{,}1°)$
3. $z = 2i \Rightarrow |z| = 2$ und $\varphi = 90° \Rightarrow z \approx 2\cdot\text{cis}(90°) = 2\cdot\text{cis}(\frac{\pi}{2})$
4. $z = -3 \Rightarrow |z| = 3$ und $\varphi = 180° \Rightarrow z \approx 3\cdot\text{cis}(180°) = 3\cdot\text{cis}(\pi)$

Beispiele für die Umrechnung Polarform → kartesische Form:

1. $z = 4\cdot\text{cis}(30°) \Rightarrow x = 4\cdot\cos(30°) \approx 3{,}46$ und $y = 4\cdot\sin(30°) = 2 \Rightarrow z \approx 3{,}46 + 2i$
2. $z = 3\cdot\text{cis}(45°) \Rightarrow x = 3\cdot\cos(45°) \approx 2{,}12$ und $y = 3\cdot\sin(45°) \approx 2{,}12 \Rightarrow z \approx 2{,}12 + 2{,}12i$
3. $z = 2\cdot\text{cis}(180°) \Rightarrow x = 2\cdot\cos(180°) = -2$ und $y = 2\cdot\sin(180°) = 0 \Rightarrow z = -2$
4. $z = 5\cdot\text{cis}(270°) \Rightarrow x = 5\cdot\cos(270°) = 0$ und $y = 5\cdot\sin(270°) = -5 \Rightarrow z = -5i$

Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 4 und 5

8.4.3. Multiplikation komplexer Zahlen in Polarform

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert. Zur Herleitung dieser Eigenschaft verwenden wir aufgrund ihrer überragenden Bedeutung die **Eulersche Formel**, die einen erstaunlich einfachen Zusammenhang zwischen den **trigonometrischen Funktionen** und der **natürlichen Exponentialfunktion** auf der imaginären Achse beschreibt:

$$\mathbf{e^{\varphi i} = \text{cis}(\varphi)}$$

Diese kleine Formel folgt ohne weiteres direkt aus der **Potenzreihenentwicklung** der drei Funktionen und ist zum großen Teil für den Erfolg der komplexen Zahlen verantwortlich. Da sie nur im **Bogenmaß** gültig ist, werden wir in der Rechenpraxis allerdings weiterhin meistens die **trigonometrische Summe** mit **Gradmaß** verwenden. Die Addition zweier Winkel bei der Multiplikation ist mit der Eulerschen Formel eine einfache Anwendung der **1. Potenzregel**:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= |z_1|\cdot\text{cis}(\varphi_1)\cdot|z_2|\cdot\text{cis}(\varphi_2) \\ &= |z_1|\cdot e^{\varphi 1 i}\cdot|z_2|\cdot e^{\varphi 2 i} \\ &= |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{(\varphi 1 + \varphi 2)i} \\ &= |z_1|\cdot|z_2|\cdot\text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

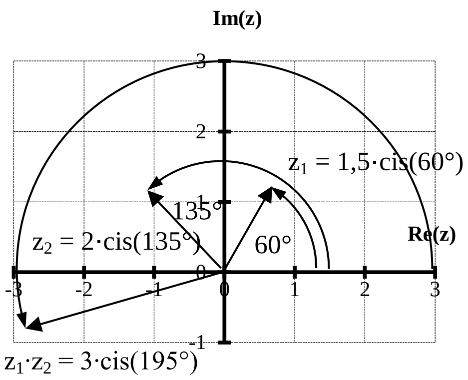
Beispiel mit $z_1 = 1{,}5\cdot\text{cis}(60°) \approx 0{,}75 + 1{,}30i$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(135°) \approx -1{,}41 + 1{,}41i$

1. In kartesischen Koordinaten: mühsam und ungenau!

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &\approx (0{,}75 + 1{,}30i)\cdot(-1{,}41 + 1{,}41i) \\ &= (-1{,}06 - 1{,}82) + (1{,}06 - 1{,}82)i \\ &= -2{,}88 - 0{,}76i \\ &\approx 2{,}98\cdot\text{cis}(194{,}8°) \end{aligned}$$

2. In Polarkoordinaten: schnell und exakt!

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= 1{,}5\cdot\text{cis}(60°)\cdot 2\cdot\text{cis}(135°) \\ &= 1{,}5\cdot 2\cdot\text{cis}(60° + 135°) \\ &= 3\cdot\text{cis}(195°) \end{aligned}$$



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 6 - 8

8.4.4. Division komplexer Zahlen in Polarform

Man dividiert durch eine komplexe Zahl, indem man durch ihren Betrag teilt und ihren Winkel subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\cdot\text{cis}(\varphi_1)}{|z_2|\cdot\text{cis}(\varphi_2)} = \frac{|z_1|\cdot e^{\varphi_1 i}}{|z_2|\cdot e^{\varphi_2 i}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\text{cis}(\varphi_1-\varphi_2)$$

Beispiel mit $z_1 = 3\cdot\text{cis}(195°) \approx -2{,}90 - 0{,}78i$ und $z_2 = 2\cdot\text{cis}(135°) \approx -1{,}41 + 1{,}41i$

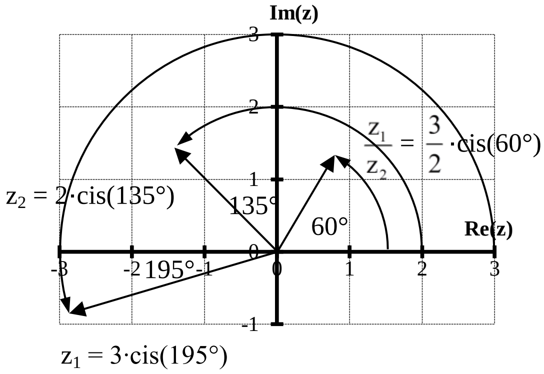
1. In kartesischen Koordinaten: mühsam und ungenau!

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \frac{-2{,}90-0{,}78i}{-1{,}41+1{,}41i} = \frac{(-2{,}90-0{,}78i)(-1{,}41-1{,}41i)}{(-1{,}41+1{,}41i)(-1{,}41-1{,}41i)}$$

$$\approx \frac{3{,}08-5{,}19i}{2+2} = 0{,}77 - 1{,}30i \approx 1{,}51\cdot\text{cis}(59{,}35°)$$

2. In Polarkoordinaten: schnell und exakt!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\cdot\text{cis}(195° - 135°) = 1{,}5\cdot\text{cis}(60°)$$



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 9

8.4.5. Quadratwurzeln komplexer Zahlen

Man zieht die Quadratwurzel einer komplexen Zahl, indem man ihren Betrag radiziert und ihren Winkel halbiert.

Die quadratische Gleichung $z^2 = a \in \mathbb{C}$ hat die beiden Lösungen $z_{1/2} = \pm\sqrt{a} = \sqrt{|a|}\cdot\text{cis}(\frac{\varphi}{2} + k\pi)$ mit k = 0 oder 1,

denn $z_1^2 = |a|\cdot\text{cis}(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}) = |a|\text{cis}(\varphi) = a$

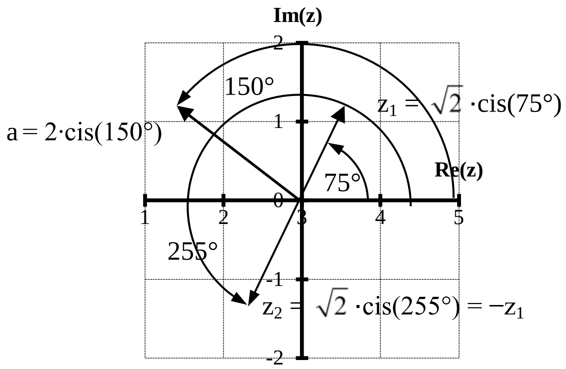
und $z_2^2 = |a|\cdot\text{cis}(\frac{\varphi}{2} + \pi + \frac{\varphi}{2} + \pi) = |a|\text{cis}(\varphi + 2\pi) = |a|\text{cis}(\varphi) = a$

Beispiel:

Die Gleichung $z^2 = -\sqrt{3} + i = 2\cdot\text{cis}(150°)$ hat im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ die Lösungen

$z_1 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(75°)$, denn $z_1^2 = 2\cdot\text{cis}(150°)$ und

$z_2 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}(75° + 180°)$, denn $z_2^2 = 2\cdot\text{cis}(150° + 360°) = 2\cdot\text{cis}(150°)$.



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr. 10 und 11

8.4.6. Höhere Wurzeln komplexer Zahlen

Man zieht die n-te Wurzel einer komplexen Zahl, indem man die n-te Wurzel des Betrages und den n-Teil ihres Winkels nimmt.

Die Gleichung $z^n = |a|\cdot\text{cis}(\varphi) \in \mathbb{C}$ hat im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ die n Lösungen $z_k = \sqrt[n]{|a|}\cdot\text{cis}\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)$ mit $0 \leq k < n$,

denn $z_k^n = |a|\cdot\text{cis}(\varphi + k\cdot 2\pi) = |a|\text{cis}(\varphi) = a$ für alle k mit $0 \leq k < n$.

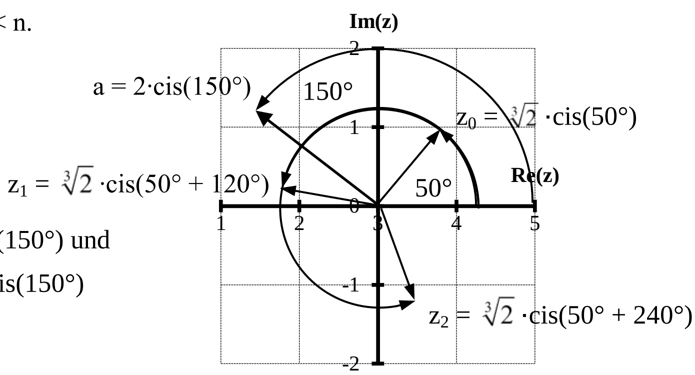
Beispiel:

Die Gleichung $z^3 = -\sqrt{3} + i = 2\cdot\text{cis}(150°)$ hat die Lösungen

$z_0 = \sqrt[3]{2}\cdot\text{cis}(50°)$, denn $z_0^3 = 2\cdot\text{cis}(150°)$,

$z_1 = \sqrt[3]{2}\cdot\text{cis}(50° + 120°)$, denn $z_1^3 = 2\cdot\text{cis}(150° + 360°) = 2\cdot\text{cis}(150°)$ und

$z_2 = \sqrt[3]{2}\cdot\text{cis}(50° + 240°)$, denn $z_2^3 = 2\cdot\text{cis}(150° + 2\cdot 360°) = 2\cdot\text{cis}(150°)$



Übungen: Aufgaben zur komplexen Zahlenebene Nr.12