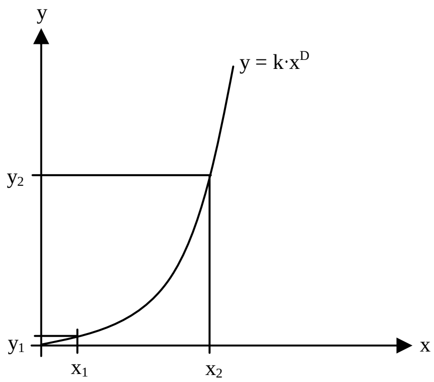
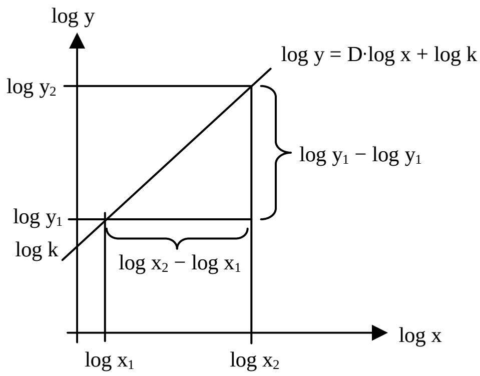
9.3.7. Grenzverhalten der Box-Dimension

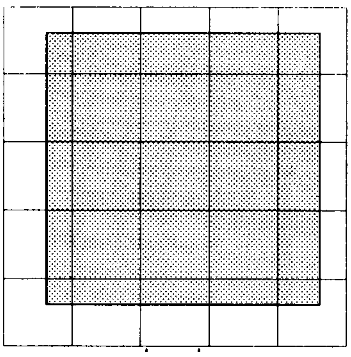
In den Beispielen aus 9.3.7. treten teilweise recht deutliche Abweichungen der Näherungsfunktion von den Messpunkten auf.
Außerdem stellt sich die Frage, wie die willkürlich gewählten Abmessungen des ursprünglichen Quadrates das Ergebnis beeinflussen. Wenn das Quadrat z.B. doppelt so groß wie die zu untersuchende Figur ist, werden zumindest die ersten Werte für die Zahl y der berührten Kästchen „zu klein“ sein.
Um diese Fragen zu untersuchen testet man das Näherungsverfahren Schritt für Schritt mit Hilfe von Logarithmen an einer Figur mit bekannter Dimension.

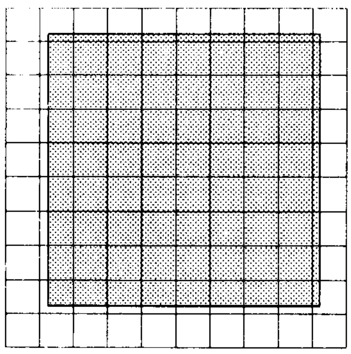
zur Erinnerung:
Die **Kurve** $y = k\cdot x^D$ wird durch **Logarithmieren** auf beiden Seiten zu einer **Geraden** $\log y = D\cdot\log x + \log k$ mit der **Steigung** $D = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$ und dem **y-Achsenabschnitt** log k:

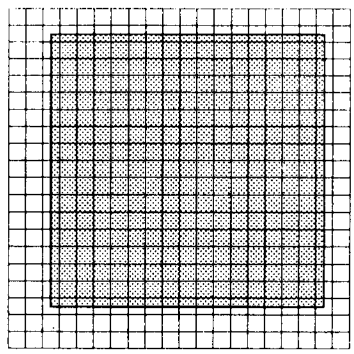




Wir betrachten wieder das Quadrat mit der bekannten Dimension 2 diesmal mit „zu groß“ gewähltem Überdeckungsquadrat und beobachten das Verhalten der Näherungswerte $\frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$ für $x \to \infty$:







x	5	5·2	5·4	5·8	5·16	5·32	$5\cdot 2^n$	$5\cdot 2^{n+1}$	∞
y	5^2	9^2	17^2	33^2	65^2	129^2			
log x									
log y									
$\frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$									

Ergebnis:
Für $x \to \infty$ streben die Verhältnisse $\frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$ ___________________ von der Wahl des ursprünglichen Quadrates immer gegen den _____________ Grenzwert.

Erklärung:

Die Verhältnisse $\frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$ sind ein Maß für die **relativen** Änderungen $\frac{y_2}{y_1}$ der berührten Kästchen bezogen auf die **relative** Änderung $\frac{x_2}{x_1}$ der Kästchenzahl. Die relativen Änderungen $\frac{y_2}{y_1}$ der berührten Kästchen werden für $x \to \infty$ aber nicht von der **Fläche** der Figur, sondern von der Komplexität ihres **Randes** bestimmt. Sie ist deshalb für $x \to \infty$ unabhängig von der Größe der Figur oder des gewählten Quadrates!