9.5.8. Chaos und logistisches Wachstum

In der Mitte des 19. Jahrhunderts veröffentlichte der belgische Mathematiker Pierre François Verhulst eine quadratische Iterationsformel zur Beschreibung eines Bevölkerungswachstums unter beschränkten Ressourcen:

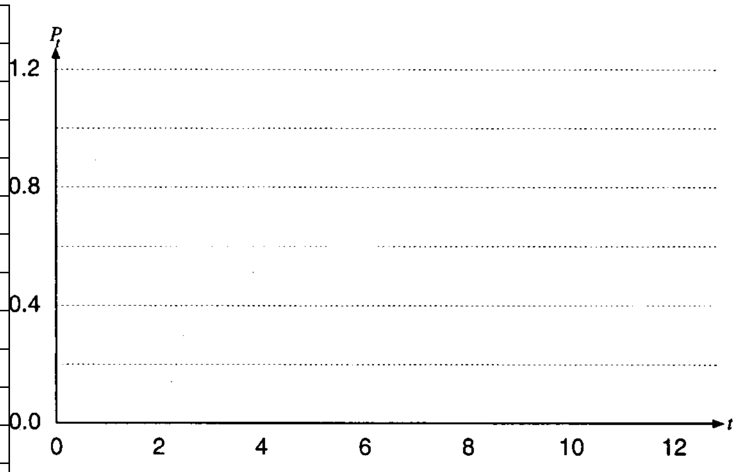
$$B_{t+1} = B_t + k \cdot B_t \cdot (S - B_t)$$

Dabei sind B_t bzw. B_{t+1} die Bestände nach t bzw. t + 1 Zeitabschnitten und S ist die **Sättigungsgrenze**, d.h. der unter den gegebenen Ressourcen maximal mögliche Bestand. Der zum alten Bestand B_t hinzukommende **Zuwachs** $k \cdot B_t \cdot (S - B_t)$ ist proportional zum alten **Bestand** B_t (je größer der Bestand, desto mehr Nachkommen) und zum **Sättigungsmanko** $S - B_t$ (die noch nicht von der aktuellen Bevölkerung beanspruchten Ressourcen). Der Proportionalitätsfaktor ist ein Maß für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder **Fruchtbarkeit** der Bevölkerung. Im Folgenden wird S = 1 gesetzt. B_t entspricht dann dem Anteil der besetzten Ressourcen und $1 - B_t$ dem Anteil der noch freien Ressourcen jeweils in Prozent.

a) Stelle den GTR auf Folgenmodus ein: MODE/Func → Seq
b) Gib die Rekursionformel für das logistische Wachstum mit $B_0 = 0{,}1$ und k = 0,6 ein: Wähle Y= und gib ein:
   nMin=0 (Folge startet bei n = 0)
   u(*n*) = u(*n*−1) + 1,2u(*n*−1)(1-u(*n*−1)) (Eingabe von *n* : Taste X,T,Θ,*n* und von u : Taste 2nd 7)
   u(*n*Min) = {0,1} (Startwert $B_0 = 0{,}1$)
c) Weitere Einstellungen:
   TBLSET: TblStart=0
   ΔTbl=1
   Indpnt: Auto
   Depend: Auto
   WINDOW: nMin=0
   nMax=20
   PlotStart=1
   PlotStep=1
   Xmin=0
   Xmax=20
   Xscl=1
   Ymin=0
   Ymax=1,2
   Yscl=0,4

d) Vervollständige die Tabelle mit Hilfe von TABLE und skizziere den Verlauf von B_t mit Hilfe von GRAPH:

t	B_t	$1 - B_t$	$k \cdot B_t \cdot (1 - B_t)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			



e) Begründe anhand des Verhaltens der beiden Faktoren B_t und $S - B_t$ im Zuwachs $k \cdot B_t \cdot (S - B_t)$:

Die Population wächst zunächst langsam, weil ____

Die Population wächst dann schneller, weil ____

Die Population wächst dann wieder langsamer, weil ______________________________________

f) Ändere den Wachstumsfaktor auf k = 2,3 bzw. k = 3,0 und übertrage die beiden Folgen in verschiedenen Farben ebenfalls in das Koordinatensystem aus d).

g) Ordne die drei Begriffe **Konvergenz**, **Periodizität** und **Chaos** den drei Folgen zu und beschrifte die Graphen entsprechend.

h) Beschreibe die Umformungen, die das logistische Wachstum in eine quadratischen Iteration mit $B_t = x_t(S + \frac{1}{k})$ umwandeln:

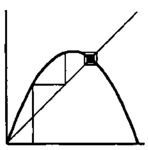
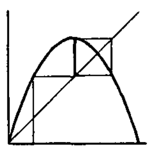
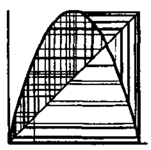
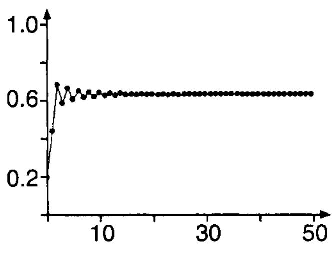
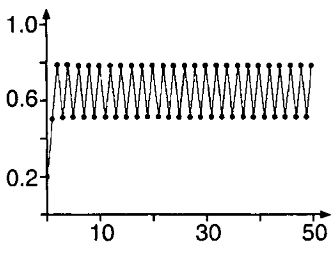
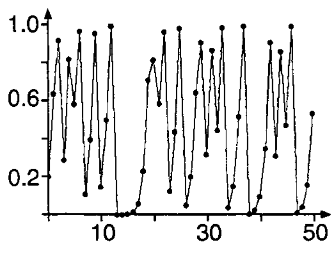
$$\begin{aligned}
B_{t+1} &= B_t + k\cdot B_t\cdot(S - B_t) && | \text{____________________} \\
&= k\cdot\frac{1}{k}B_t + k\cdot B_t\cdot(S - B_t) && | \text{____________________} \\
&= k\cdot B_t\,(S + \frac{1}{k} - B_t) && | \text{____________________} \\
x_{t+1}\cdot(S + \frac{1}{k}) &= k\cdot x_t(S + \frac{1}{k})((S + \frac{1}{k}) - x_t(S + \frac{1}{k})) && | \text{____________________} \\
x_{t+1} &= k\cdot x_t(1 - x_t)
\end{aligned}$$

i) Überprüfe die Rechnung aus h) experimentell mit dem Programm iter aus 9.5.4. Die Wachstumsfaktoren $k_1 = 0,6$; $k_2 = 2,3$ und $k_3 = 3,0$ entsprechen den Streckfaktoren. Nur die Startwerte müssen nach der Formel $B_0 = x_0(S + \frac{1}{k})$ geändert werden. Setze dazu $B_0 = 0,1$; S = 1 sowie die Wachstumsfaktoren k_1, k_2 und k_3 ein und berechne $x_0 = \frac{B_0}{S+\frac{1}{k}}$.Entsprechen die drei quadratischen Iterationen den drei Wachstumsfolgen?

j) Beschreibe die Umformungen, die die quadratischen Iteration in ein logistische Wachstum mit $S = 1 - \frac{1}{k}$ umwandeln:

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= k\cdot x_t(1 - x_t) && | \text{____________________} \\
x_{t+1} &= k\cdot x_t(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - x_t) && | \text{____________________} \\
x_{t+1} &= k\cdot\frac{1}{k}x_t + k\cdot x_t(1 - \frac{1}{k} - x_t) && | \text{____________________} \\
x_{t+1} &= x_t + k\cdot x_t(S - x_t)
\end{aligned}$$

k) In den folgenden Abbildungen werden die ersten 50 Schritte einer quadratischen Iteration mit den Streck- bzw. Wachstumsfaktoren $k_1 = 2,8$, $k_2 = 3,18$ und $k_3 = 4,0$ und Startwert $x_0 = 0,2$ verglichen. Gib jeweils die Sättigungsgrenze des entsprechenden logistischen Wachstums an. und kennzeichne das Verhalten:

Funktion	$f_{2,8}(x) = 2,8x(1 - x)$	$f_{3,18}(x) = 3,18x(1 - x)$	$f_4(x) = 4x(1 - x)$
			
Folge:	$x_{t+1} = x_t + \_\_\cdot x_t(\_\_ - x_t)$	$x_{t+1} = x_t + \_\_\cdot x_t(\_\_ - x_t)$	$x_{t+1} = x_t + \_\_\cdot x_t(\_\_ - x_t)$
			
Verhalten:	____________________	____________________	____________________