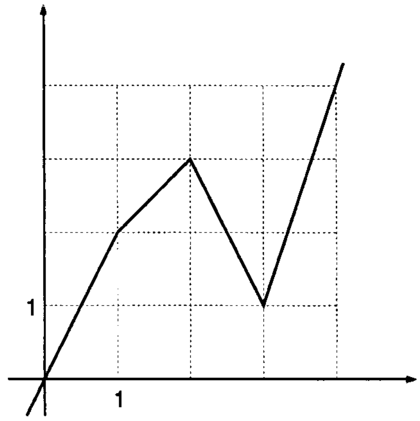
9.6.2. Invariante Mengen

Eine Menge P (für Prison) heißt **invariant**, wenn Iterationsfolgen mit Startwerten $x_0 \in P$ auch wieder in P liegen. Solche Folgen können **konvergent**, **periodisch** oder **chaotisch** sein. Startwerte, die nicht in P liegen, führen dagegen zu **divergenten** Iterationsfolgen, die gegen Unendlich streben.



Betrachte die Iteration der stückweise definierte Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ -2x + 7 & \text{für } 2 < x \leq 3 \\ 3x - 8 & \text{für } 3 < x \end{cases}$$

a) Berechne die ersten 4 Iterationsschritte ausgehend vom Startwert $x_0$und entscheide, ob die Startwerte x_0 zur Invariante Menge P gehören:

x_0	$x_1 = f(x_0)$	$x_2 = f(x_1)$	$x_3 = f(x_2$9	$x_4 = f(x_3)$	$x \in P$?
−0,5	−1	−2	−4		
2,75					
3,0					
4,5	5,5	8,5			

b) Ein Intervall [b; c] heißt **invariant**, wenn alle Iterationsfolgen mit Startwerten $x_0 \in [a; b]$ auch wieder in [a; b] liegen: $f([a; b]) \subset [a; b]$. Invariante Intervalle sind daher Teilmengen der invarianten Menge P. Aber nicht jede invariante Menge P enthält invariante Intervalle. Welche Gestalt hat eine Menge, die keine Intervalle enthält?

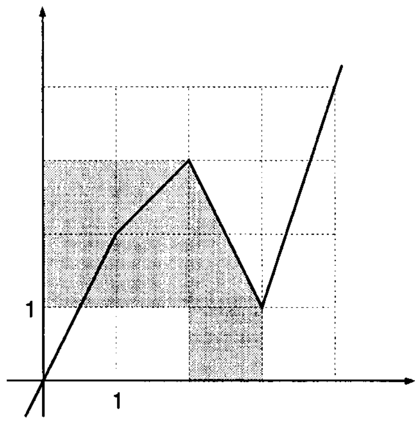
c) Zeige, dass die folgenden Intervalle [a; b] unter f nicht invariant sind. Suche dazu ein $x \in [a; b]$ mit $f(x) \notin [a; b]$.
[0; 1]   [3; 4]   [2; 3]

d) Invariante Intervalle lassen sich auch mit Hilfe von Definitions- und Wertebereich beschreiben. Ein **Definitionsbereich** D ist eine Menge von x-Werten und der dazugehörige **Wertebereich** f(D) ist die Menge der entsprechenden y-Werte. Vervollständige:

Ein Intervall [a; b] ist invariant, wenn sein Wertebereich f([a; b]) ________________
____

Für welches der folgenden Intervalle liegt der Wertebereich wieder im Definitionsbereich?

[0, 2]   [0, 3]   [1, 4]

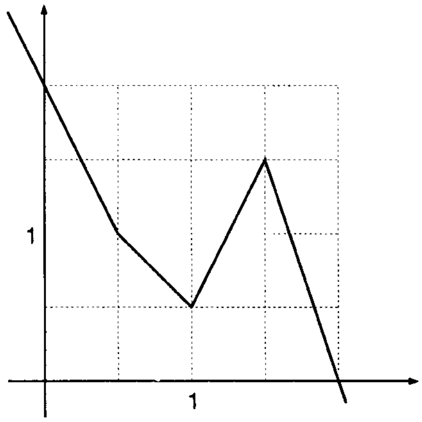


Definitionsbereich [2; 3]
Wertebereich f([2, 3]) = [1, 3]

e) Erkläre am Beispiel der Funktion f, warum eine invariante Menge auch nicht invariante Intervalle enthalten kann.

f) Erkläre am Beispiel der Funktion f, warum ein invariantes Intervall auch nicht invariante Intervalle enthalten kann.

g) In einem Koordinatensystem bezeichnet man mit $[a; b] \times [c; d]$ die Menge aller Punkte $(x|y)$ mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$. Zeichne die beiden Quadrate $[0; 1] \times [0; 1]$ und $[0{,}5; 1{,}5] \times [0{,}5; 1{,}5]$ in das nebenstehende Koordinatensystem



h) Für welches der beiden Quadrate aus g) gilt
$[a; b] \times [a; b] \subset [a; b] \times f([a; b])$?

i) In Zukunft verwenden wir den **Box-Test**, um invariante Intervalle zu bestimmen. Das Intervall $[a; b]$ ist invariant, wenn das Rechteck $[a; b] \times f([a; b])$ im Quadrat $[a; b] \times [a; b]$ liegt. Bestimme mit Hilfe des Box-Tests das größte invariante Intervall für die beiden Funktionen in diesem Abschnitt.