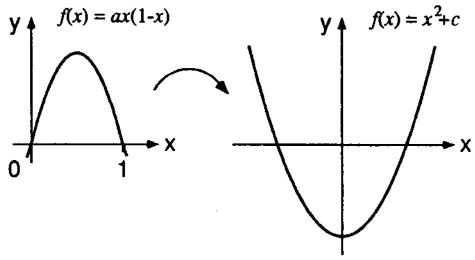
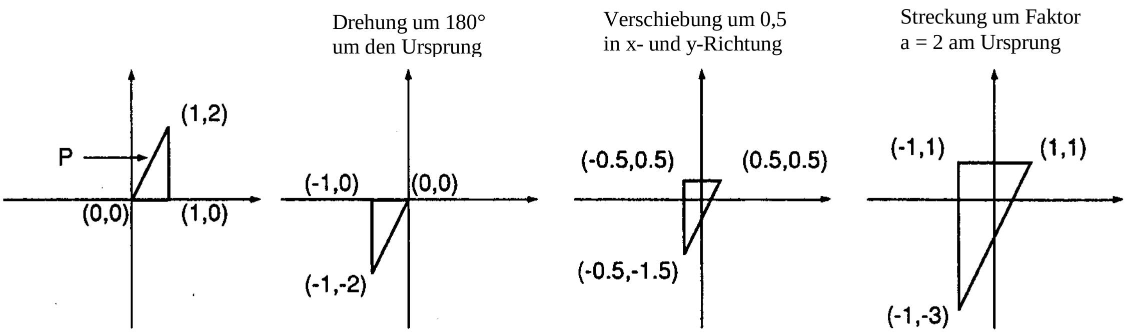
9.6.6. Invariante Mengen bei ähnlichen Parabeln

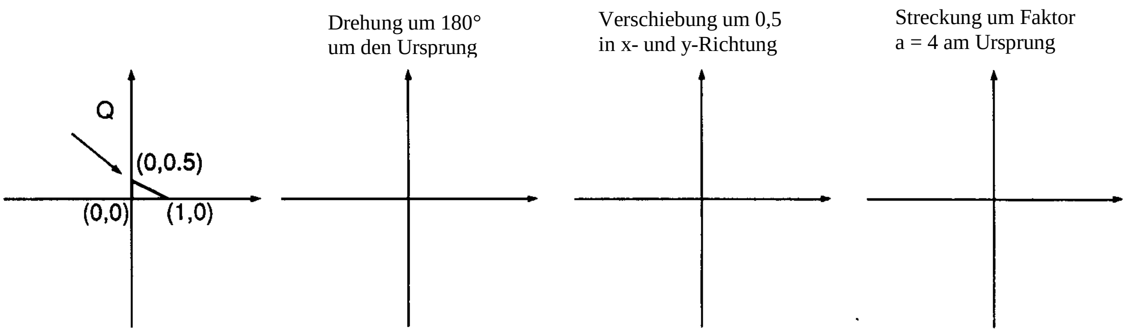
Die Mandelbrot-Menge wird von den invarianten Mengen der Parabeln $f_c(x) = x^2 + c$ erzeugt. Um die Erkenntnisse über die invarianten Mengen der Parabeln $f_a(x) = ax(1 - x)$ auf die Parabeln f_c zu übertragen, verwenden wir drei Ähnlichkeitsabbildungen: Drehung um 180°, Verschiebung um 0,5 Einheiten in x-und y-Richtung und schließlich Streckung um den Faktor a.



a) In der folgenden Abbildung werden die drei Ähnlichkeitsabbildungen mit a = 2 auf das Dreieck P angewendet.



b) Wende die drei Ähnlichkeitsabbildungen mit a = 4 auf das abgebildete Dreieck Q an.

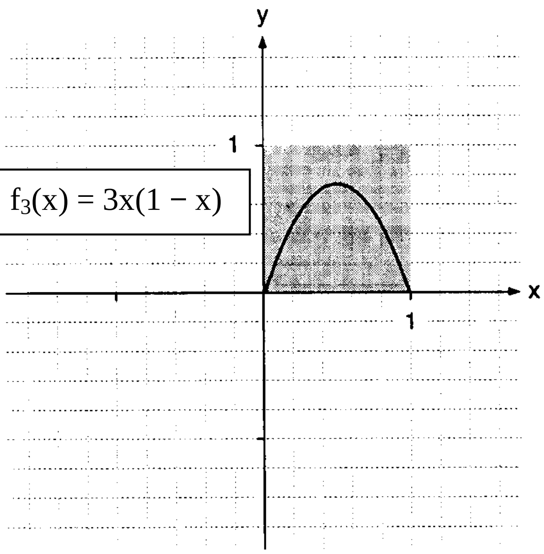


c) Vervollständige die Tabelle mit Hilfe der Beispiele a) und c)

Original	Drehung um 180° um den Ursprung	Verschiebung um 0,5 in x- und y-Richtung	Streckung um Faktor a in x- und y-Richtung
x	x’ =	x’’ =	$x''' = -ax + \frac{a}{2}$
y	y’ =	y’’ =	$y''' = -ay + \frac{a}{2}$

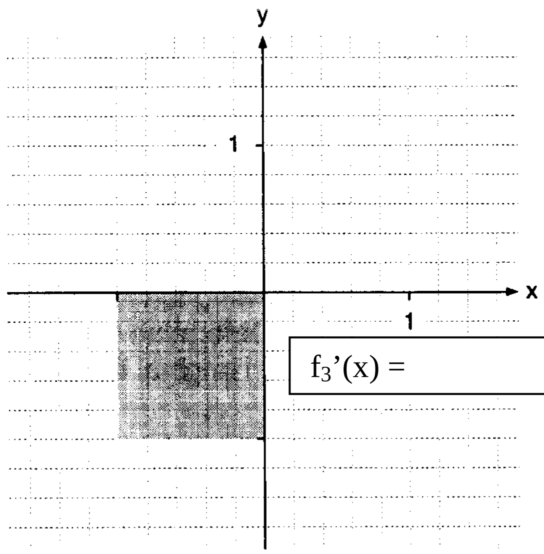
d) Die Parabel $f_3(x) = 3x(1 - x)$ hat den Scheitelpunkt S(0,5|0,75) und geht durch die Punkte $S_{x1}(0|0)$ und $S_{x2}(1|0)$.
Wende die drei Ähnlichkeitsabbildungen mit a = 3 nacheinander auf die drei Punkte an und zeichne die Parabeln f_3', f_3'' und f_3'''.
Bestimme dann die Funktionsgleichungen der drei Parabeln f_3', f_3'' und f_3'''.

a.



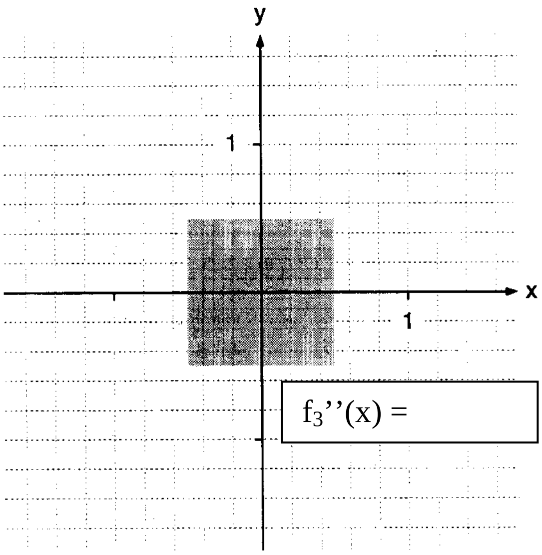
$f_3(x) = 3x(1 - x)$

b.



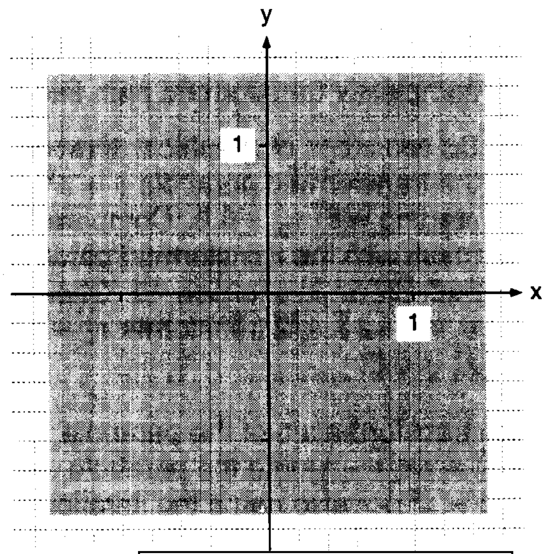
$f_3'(x) =$

c.



$f_3''(x) =$

d.



$f_3'''(x) =$

e) Vervollständige die folgende Tabelle mit Hilfe des Beispiels d):

Original	Drehung um 180° um den Ursprung	Verschiebung um 0,5 in x- und y-Richtung	Streckung um Faktor a in x- und y-Richtung
Ersetze x durch	$-x$	$x - 0{,}5$	$\frac{x}{a}$
Ersetze y durch	$-y$	$y - 0{,}5$	$\frac{y}{a}$
$f_a(x) = ax(1 - x)$	$f_a'(x) =$	$f_a''(x) =$	$f_a'''(x) = x^2 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$

f) Gib jeweils die Bildfunktion $f_c(x) = x^2 + c$ mit $c = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$ an:

Original $f_a(x) = ax(1 - x)$	$f_1(x) = x(1 - x)$	$f_3(x) = 3x(1 - x)$	$f_4(x) = 4x(1 - x)$
Bild $f_c(x) = x^2 + c$			

g) Führe an den vier Parabeln f_3, f_3', f_3'' und f_3''' jeweils die ersten 4 Schritte einer graphischen Iteration mit den Startwerten $x_0 = 0{,}3$, $x_0' = -0{,}3$; $x_0'' = 0{,}2$ und $x_0''' = 0{,}6$ aus. Was stellst Du fest?

h) Zusammen mit den Parabeln werden auch die Iterationsfolgen und damit auch die invarianten Mengen den gleichen Ähnlichkeitsabbildung $x''' = -ax + \frac{a}{2}$ unterworfen. Verwende diese Abbildung, um die Bilder der invarianten Mengen in der folgenden Tabelle zu bestimmen:

Funktion f_a	$f_1(x) = x(1 - x)$	$f_3(x) = 3x(1 - x)$	$f_4(x) = 4x(1 - x)$	$f_a(x) = ax(1 - x)$
Invariante Menge	[0; 1]	[0; 1]	[0; 1]	[0; 1]
Bildfunktion f_c	$f_{0,5}(x) = x^2 - 0{,}5$			$f_c(x) = x^2 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}$
Invariante Menge	$[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$			