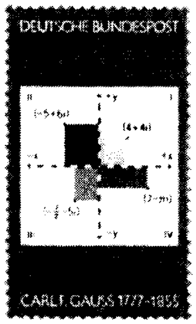
## 9.6.8. Komplexe Zahlen

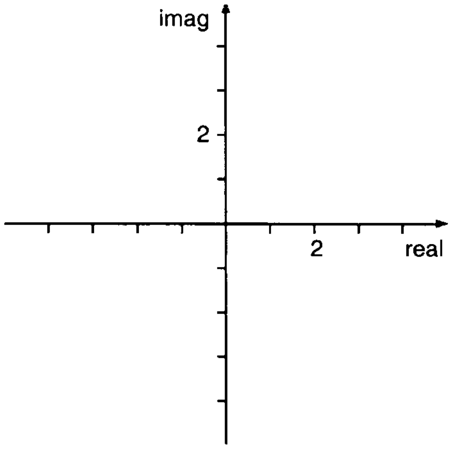



Die Mandelbrot-Menge zeigt Parameter c mit invarianten Intervallen bei Iteration von $f_c(z) = z^2 + c$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Menge der $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** besteht aus den Elementen x + yi mit reellen Zahlen x und y. Neu ist die **imaginäre Einheit** i = $\sqrt{-1}$. Die Erweiterung der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ um die imaginären Zahlen yi ermöglicht die Lösung beliebiger quadratischer, kubischer, usw. Gleichungen, da sie auch **negative Radikanden** z.B. in der p-q-Formel erlaubt. In der komplexen Zahl x + yi nennt man x den **Realteil** und y den **Imaginärteil**. Die Rechenregeln für reelle Zahlen übertragen sich auf die komplexen Zahlen, wobei man zusätzlich die Eigenschaft $i^2 = -1$ beachten muss.

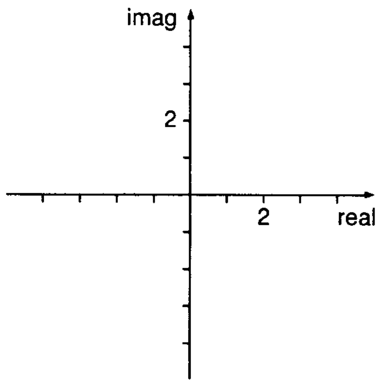
a) Zwei komplexe Zahlen werden **addiert**, indem man Realteil und Imaginärteil getrennt addiert: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. Berechne die folgenden Ausdrücke:

| | |
|---|---|
| (1 + 4i) + (3 + 2i) | = (1 + 3) + (4 + 2)i = 4 + 6i |
| (2 + i) + (1 + 2i) | = ______________________ |
| (2 − 2i) + 3i | = ______________________ |
| (3 − 4i) + (1 + i) | = ______________________ |
| (−3 − 2i) + (1 + 4i) | = ______________________ |

b) Da jede komplexe Zahl x + yi mit Realteil x und Imaginärteil y zwei unabhängige Komponenten besitzt, lässt sie sich in einem Koordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse als Punkt (x|y) darstellen. Zeichne die folgende komplexen Zahlen in das nebenstehende Koordinatensystem ein.
3 + 2i
2 + i
4 − 3i
−2+ 3i



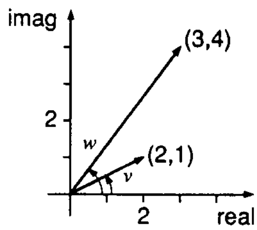

c) Die Summe zweier komplexer Zahlen lässt sich geometrisch durch Hintereinanderlegen der entsprechenden Vektoren darstellen. Zeichne die beiden folgenden Summen wie im Beispiel gezeigt als Parallelogramme in das nebenstehende Koordinatensystem.
(3 − 4i) + (1 + i)
(−3 − 2i) + (1 + 4i)




d) Das Produkt komplexer Zahlen wird durch Ausmultiplizieren unter Beachtung der Regel $i^2 = -1$ berechnet. Vervollständige nach dem gegebenen Beispiel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (2 + 3i)(5 + 7i) | = 10 + 29i + 21i$^2$ | = 10 + 29i − 21 | = −11 + 29i |
| (1 + 2i)(3 + 5i) | = ____________ | = ____________ | = ____________ |
| (3 − 4i)(5 − 7i) | = ____________ | = ____________ | = ____________ |
| (a + bi)(c + di) | = ____________ | = ____________ | = ____________ |

e) Auch das Produkt komplexer Zahlen lässt sich geometrisch deuten. Dazu benötigt man den Winkel $\alpha_z$ zur x-Achse und den Betrag |z| einer komplexen Zahl. Bestimme den Winkel $\alpha_z$ und den Betrag |z| von z = x + yi anhand der nebenstehenden Skizze und mit Hilfe des Tangens und des Satzes von Pythagoras.




Winkel $\alpha_z$ = ______________

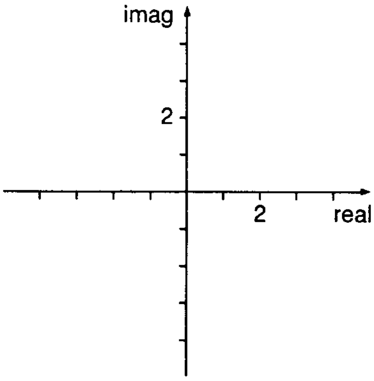
Betrag |z| = ____________________

f) Vervollständige die Tabelle

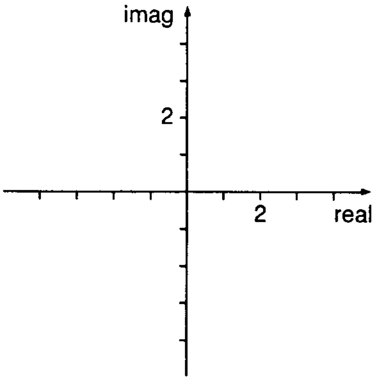
| $z$ | $1 + i$ | $0{,}5 - i$ | $-3 + 4i$ | $-2 - i$ | $i$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_z$ | | | | | | |
| $\lvert z \rvert$ | | | | | | |

g) Vervollständige die drei Tabellen und zeichne die Faktoren sowie ihr Produkt in die nebenstehenden Koordinatensysteme. Vergleiche die Winkel und Beträge der Faktoren mit denen des Produktes.

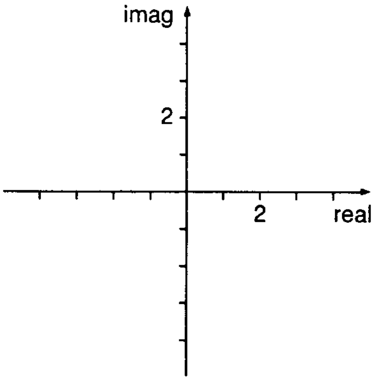
| | $z_1$ | $z_2$ | $z_1 \cdot z_2$ |
|---|---|---|---|
| | $1 + i$ | $1 + i$ | |
| Winkel $\alpha_z$ | | | |
| Betrag $\lvert z \rvert$ | | | |




| | $z_1$ | $z_2$ | $z_1 \cdot z_2$ |
|---|---|---|---|
| | $1 + 2i$ | $2 + i$ | |
| Winkel $\alpha_z$ | | | |
| Betrag $\lvert z \rvert$ | | | |




| | $z_1$ | $z_2$ | $z_1 \cdot z_2$ |
|---|---|---|---|
| | $-1 + 3i$ | $1 + i$ | |
| Winkel $\alpha_z$ | | | |
| Betrag $\lvert z \rvert$ | | | |




Ergebnis: Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden die Winkel _________________ und die Beträge ______________________.