Mengenlehre

Arne Vorwerg

August 2021

Vorwort

Die axiomatische Mengenlehre bildet zusammen mit dem **Axiomensystem von Hilbert** für die Geometrie das Fundament der Mathematik. In dem vorliegenden Text handelt es sich um eine komprimierte Darstellung des Axiomensystems von **John von Neumann**, **Paul Bernays** und **Kurt Gödel** (NBG) in der Variante von **John Kelley** und **Anthony Morse**. Ausgehend von den **semantischen Antinomien** werden zunächst die Symbole der **mathematischen Objektsprache** motiviert und erklärt. Auch bei der Beschränkung auf die Objektsprache bleiben jedoch **logische Antinomien**, die sich nur vermeiden lassen, wenn man auch die Inhalte der Mathematik auf möglichst wenige Grundannahmen (**Axiome**) zurückführt. Der wesentliche Unterschied des NBG-Systems zum verbreiteten ZFC-Modell besteht in der Auflösung der logischen Antinomien mit Hilfe der Unterscheidung von **Mengen und Klassen**. Eine Klasse kann alles sein, was sich mit Hilfe der mathematischen Objektsprache beschreiben lässt. Der Mengenbegriff enthält bereits die Vorstellung einer Absonderung von einer übergeordneten Gesamtheit. In NBG fordert man daher, dass jede Menge Element einer übergeordneten Klasse sein muss. Die folgende Behandlung der Mengenalgebra mit **Relationen, Funktionen und Ordnungen** ist Standard. Die **Ordinalzahlen** werden als mengentheoretisches Modell und Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen eingeführt. Im wesentlichen handelt es sich um eine Klasse, die sowohl durch **Inklusion** als auch durch die **Elementbeziehung** wohlgeordnet wird. Wichtige Anwendungen des verallgemeinerten Zählprinzips mit Ordinalzahlen sind Definitionen mit **transfiniter Rekursion** und Beweise mit **transfiniter Induktion**. Die **endlichen Ordinalzahlen** lassen sich über die **Peano-Axiome** mit den **natürlichen Zahlen** identifizieren. Entsprechend findet man in diesem Abschnitt Definitionen mit **finiter Rekursion** und Beweise mit **finiter Induktion**. Die Erweiterungen der natürlichen Zahlen auf **ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen** sind algebraisch und topologisch motiviert und werden in diesem Text daher nahezu ohne Beweise beschrieben. Für die Erweiterung des Zählprinzips auf beliebige Menge mit Hilfe der **Kardinalzahlen** benötigt man das **Auswahlaxiom**. Dieses ist unabhängig von den übrigen Axiomen und wird für wichtige Aussagen in Topogie und Algebra in Form von gleichwertigen Aussagen wie z.B. dem **Lemma von Zorn** oder dem **Maximalprinzip von Haussdorff** benötigt. Die Gleichwertigkeit der vier häufigsten Alternativen zum Auswahlaxiom wird daher ziemlich ausführlich bewiesen. Die endlichen und unendlichen Kardinalzahlen werden kurz bis zur **Kontinuumshypothese** dargestellt. Der Text enthält aus Gründen der Übersichtlichkeit nur das Nötigste zum Verständnis der Begriffe. Die Begründungen einfacherer Aussagen sind häufig in den Text einbezogen oder ausgelassen. Für das Verständnis reichen formal Schulkenntnisse aus; in der zweiten Hälfte wird allerdings eine Vertrautheit mit mathematischen Denkweisen vorausgesetzt, die weit über die übliche Schulbildung hinausgeht.

Höchenschwand, im August 2021 Arne Vorwerg

Contents

1 Einleitung

Die Mathematik dient wie die anderen Naturwissenschaften auch dazu, unser Verständnis der Welt um uns zunächst zu vereinfachen und dann zu erweitern. Bei der Entwicklung der Begriffe von Unendlichkeit und Grenzwerten sowie der Erweiterung der Zahlbereiche auf irrationale, transzendente und imaginäre Zahlen ergaben sich im 19. Jahrhundert zunehmend Widersprüche (**Paradoxone** = neben der vorherrschenden Meinung (dogma) oder besser **Antinomien** = gegen die eigene Bedeutung) und Unsicherheiten um den Begriff der Zahl und des Zählens. Das Ziel der Mengenlehre besteht darin, die Möglichkeiten und Grenzen des Zählens zu verstehen, indem man die Zahlen auf möglichst wenigen einfachen und verständlichen Voraussetzungen aufbauend nachkonstruiert.

2 Objektsprache und Metasprache

Die Vielfalt der alltäglichen Umgangssprache bietet Raum für **semantische Antinomien**, wie z.B. die folgenden:

1. Wenn jemand sagt: "Ich lüge." , lügt er dann oder lügt er nicht?
2. Das Krokodil hat ein Kind geraubt und sagt dem Vater: "Wenn du errätst, ob ich das Kind zurückgebe, werde ich es tatsächlich zurückgeben. Der Vater antwortet: "Du wirst das Kind nicht zurückgeben." Was soll das Krokodil tun?
3. Richards Paradox: Ordnet man alle endlichen und ausschließlich aus lateinischen Buchstaben gebildeten Ausdrücke für reelle Zahlen (z.B. „Achtunddreissig geteilt durch Sieben" oder „Die Maßzahl der Diagonale eines Quadrates mit einer Kantenlänge von einem Meter in Metern") lexikographisch, so erhält man eine Folge a(n) reeller Zahlen. Der Ausdruck „Dies ist die Zahl, die man erhält, wenn man die n-te Stelle von a(n) um eins vermehrt, wenn sie den Wert Null bis Acht besitzt und auf Null setzt, wenn sie den Wert Neun besitzt" gehört einerseits zur Folge a(n), ist aber andererseits verschieden von jeder Zahl in a(n).

Alle semantischen Antinomien kommen dadurch zustande, dass sich Ausdrücke auf sich selbst beziehen und dadurch Zirkelschlüsse und Widersprüche ermöglichen. In Beispiel 1 stellt sich der Ausdruck selbst in Frage. In Beispiel 2 ist eine wenn-dann-Bedingung nicht korrekt formuliert, denn die Folge „dann gebe ich das Kind zurück“ legt bereits die Bedingung „Wenn du errätst, ob ich das Kind zurückgebe oder nicht“ fest. Auch hier entsteht der Widerspruch durch den Selbstbezug des Ausdruckes. In Richards Paradox steht der zitierte Ausdruck ja tatsächlich an einer Stelle n der Folge a(n) und bezieht sich damit auf sich selbst.

Um semantische Antinomien zu vermeiden, schränkt man die mathematische **Objektsprache** soweit ein, dass Selbstbezüge und Mehrdeutigkeiten unmöglich oder zumindest leicht erkennbar werden. Die Beschränkung auf möglichst wenige mathematischen Symbole (Vokabeln) und klar definierte Verknüpfungsregeln (Grammatik) sollen die Formulierung eindeutiger und widerspruchsfreier Anweisungen erleichtern und ähnelt daher den **Programmiersprachen** für Computer. Demgegenüber verwendet man weiterhin die alltägliche **Metasprache**, um Aussagen der Objektsprache zu kommentieren.

3 Axiome, Definitionen und Sätze

Logische Antinomien sind inhaltliche Widersprüche, die auch durch Beschränkung auf eine reduzierte Objektsprache erhalten bleiben. Beispiele sind:

1. Die **Russel-Antinomie** betrifft das **Universum** U aller Mengen. Ist es tatsächlich eine Menge, so ist sie Element von sich selbst ($U \in U$), was absurd erscheint. Ist es keine Menge, was ist es dann?
2. Die **Burali-Forti-Antinomie** betrifft die Menge ω der verallgemeinerten natürlichen Zahlen (**Ordinalzahlen**). Die Menge aller Ordinalzahlen bis und einschließlich einer gegebenen Ordinalzahl entspricht der Ordinalzahl, die um eins größer ist als die gegebene Ordinalzahl. Die Menge ω aller Ordinalzahlen selbst hat aber auch wieder alle Eigenschaften einer Ordinalzahl und ist daher Element von sich selbst. Die Menge aller Ordinalzahlen einschließlich ω entspricht dann aber der Ordinalzahl $\omega + 1$ und ω ist also doch nicht die Menge aller Ordinalzahlen.
3. Die **Cantor-Antinomie** bestrifft die Mächtigkeiten (**Kardinalzahlen**) $C(U)$ des Universums U und $C(P(U))$ der Menge $P(U)$ (Potenzmenge) ihrer Teilmengen. Einerseits muss U die größte Mächtigkeit aller Mengen besitzen, andererseits muss $C(P(U))$ noch größer sein.

Diese drei Antinomien klingen alle recht ähnlich, da sie die größten aller vorstellbaren Mengen und ihre mögliche Erweiterung im Widerspruch zu ihre Maximaleigenschaft beschreiben. Erstaunlicherweise sind die drei Antinomien aber zumindest nicht gleichwertig. Es gibt logische Systeme, die Nr.1 vermeiden und Nr. 3 zulassen.

Um auch logische Widersprüche möglichst weitgehend zu vermeiden, beschränkt man sich beim inhaltlichen Aufbau der Mathematik auf wenige Grundannahmen (**Axiome**), aus denen alle weiteren Aussagen (**Sätze**) hergeleitet werden. Die logischen Regeln der Herleitung mittels der primitiven logischen Konstanten $\Rightarrow$ („daraus folgt" ; „wenn..., dann...") und $\Leftrightarrow$ („ist gleichwertig zu"; „...genau dann, wenn...") werden aber nicht weiter definiert. Ihre Gültigkeit beschränkt sich auf menschliches Ermessen. Häufig auftretende Konstruktionen werden in der Regel durch Symbole und Begriffe abgekürzt**. Definitionen** enthalten im Gegensatz zu Sätzen nicht die Konstanten $\Rightarrow$ oder $\Leftrightarrow$.

4 Elemente der mengentheoretischen Objektsprache

Logische Variablen $a, b, c, ...A, B, C, ..\alpha, \beta, \gamma, ...$ bezeichnen **mathematische Objekte** wie z.B. Zahlen, Mengen, Funktionen und Ausdrücke. Steht eine Variable a in Abhängigkeit von einer frei wählbaren (siehe unten) Variablen x, so bringt man dies durch die üblichen Klammern zum Ausdruck und schreibt $a(x)$. Ersetzt man in einem Ausdruck eine Variable durch eine andere Variable, die bisher nicht in dem Ausdruck auftrat, so bleibt der Ausdruck unverändert. Z.B. hat der Ausdruck $\varphi(x, y, \delta) = |x - y| < \delta$ die gleiche Bedeutung wie der Ausdruck $\varphi(x, z, \delta) = |x - z| < \delta$, da die Variable y bzw. z in diesem Ausdruck frei gewählt werden kann.

Logische Konstanten $=$, $\in$, $\exists$, ...bezeichnen die **Beziehungen** zwischen den Objekten der Mengenlehre. Im Gegensatz zu den Variablen dürfen sie nicht durch andere Konstanten ersetzt werden, wenn die Bedeutung eines Ausdruckes erhalten bleiben soll. Die einfachsten logischen Konstanten sind die rechts aufgeführten **primitiven Symbole**. Dabei handelt es sich um Abkürzungen für Ausdrücke der Metasprache, die darüber hinaus nicht näher erklärt werden. Sie unterliegen daher dem **subjektiven Vorbehalt** der menschlichen Metasprache. Zwei Objekte des täglichen Lebens (Menschen, Ameisen, Elektronen, Rechenausdrücke, ...) erscheinen z.B. **gleich**, wenn sie für den Beobachter **ununterscheidbar** sind. Die Unterscheidbarkeit hängt aber von den Wahrnehmungen und Interessen des Beobachters ab. Die Rechenausdrücke $14 : 2$ und $3+4$ sind,

Symbol	Bedeutung
$=$	ist gleich
$\in$	ist Element von
$\wedge$	und
$\vee$	einschließliches oder
$\neg$	nicht
$\exists$	es gibt ein ... mit
$\forall$	für alle ... gilt:
$\Rightarrow$	daraus folgt:
$\Leftrightarrow$	ist gleichwertig zu
:	, für die gilt:

wie jeder Grundschüler bezeugen kann, in ihrer Qualität und Schwierigkeit völlig verschieden, werden aber in der Mathematik gewöhnlich gleich gesetzt, da man sich bei der Betrachtung auf das Ergebnis 7 beschränkt und den Rechenweg und die Ausgangsziffern außer Acht lässt. Ähnliche Vorbehalte gelten für die meisten anderen primitiven Symbole, insbesondere aber für $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$, die sich auf den „gesunden Menschenverstand", d.h. menschliche Logik und Überzeugung berufen.

Ausdrücke beschreiben **mathematische Aussagen** mit Hilfe logischer Konstanten und Variablen. Mathematische Aussagen sollen im Gegensatz zu den Aussagen des täglichen Lebens eindeutig mit „**wahr**" bzw. „erfüllt" oder „**falsch**" bzw. „nicht erfüllt" bewertet werden können. Um dies zu gewährleisten und sinnlose Ausdrücke wie z.B. $\Rightarrow \in xy$ auszuschließen, hält man sich an die folgenden **rekursiven Konstruktionsregeln**:

1. Ausdrücke können die Gestalt „$x \in y$" oder „$x = y$" haben.
2. Sind φ sowie χ Ausdrücke und x eine Variable, so sind auch $\neg\varphi, \varphi \wedge \chi, \varphi \wedge \chi, \varphi \Rightarrow \chi, \varphi \Leftrightarrow \chi, \exists x : \varphi$ und $\forall x : \varphi$ Ausdrücke.

Freie und gebundene Variablen: Enthält ein Ausdruck eine Variable, die nicht durch die **Quantoren** $\exists$ oder $\forall$ bestimmt wird, so ist die Variable einerseits frei wählbar; andererseits ist die Gültigkeit des Ausdruckes von der Wahl dieser Variablen abhängig. Die Variable hat dann die Rolle eines **Parameters** und wird **freie** Variable genannt. Die Abhängigkeit des Ausdruckes φ von einer freien Variablen x wird durch die übliche Klammerschreibweise $\varphi(x)$ kenntlich gemacht. Ist die Auswahl der Variablen durch die Quantoren $\exists$ oder $\forall$ festgelegt, so spricht man von **gebundenen** Variablen, deren Auswahl keinen Einfluss auf die Gültigkeit des Ausdruckes hat. Z.B. ist der Ausdruck $\varphi(x, y) = x \in y$ für $x = \frac{7}{2}$ und $y = \mathbb{Z}$ falsch und für $x = \frac{7}{2}$ und $y = \mathbb{Q}$ richtig. Der Ausdruck $\chi(x) = \exists x : x \in y$ ist wahr für $y = \mathbb{Z}$ und falsch für $y = \emptyset$. Der Ausdruck $\psi = \exists x : x \in \mathbb{Z}$ ist immer wahr, denn es gibt ein solches x, z.B. $x = 2$. Der Ausdruck $\vartheta = \forall x : x \in \mathbb{Z}$ ist immer falsch, denn für $x = \frac{7}{2}$ ergibt sich ein Widerspruch.

Axiome, Sätze und Definitionen enthalten keine freien Variablen, da ihre Gültigkeit unabhängig von der willkürlichen Auswahl einer einzelnen Variable sein soll. Zur Förderung der Übersichtlichkeit werden daher die Erklärungen $\forall x, \forall y, \forall z, ...$ usw. zu Beginn von Axiomen, Definitionen und Sätzen weggelassen.

Definitionen sind Erklärungen für neue logische Symbole, die zur Abkürzung eingeführt werden. Man erhält durch Einsetzen der neu definierten Symbole kürzere und übersichtlichere Ausdrücke, die sich aber jederzeit wieder auf primitive Ausdrücke zurückführen lassen müssen.

Unsere erste Definition dient der Abkürzung der Negation in den beiden häufigsten Anwendungsfällen und soll natürlich für alle x, y gelten, ohne dass dies explizit in der Form $\forall x, \forall y$ vorangestellt wird.

4.1 Definition der Negation: $x \notin y :\Leftrightarrow \neg(x \in y)$ und $x \neq y :\Leftrightarrow \neg(x = y)$.

Als Beispiel für die Verwendung von Metasprache und Objektsprache vergleichen wir zwei gängige Definitionen für die Stetigkeit einer Funktion:

4.2 Definition der Stetigkeit I:
Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x ihres Definitionsbereiches, wenn das Urbild jeder $f(x)$ enthaltenden offenen Menge des Wertebereichs auch wieder offen im Definitionsbereich ist.

4.3 Definition der Stetigkeit II:
f heißt stetig an der Stelle $x \in D_f \Leftrightarrow \left(f(x) \,\text{offen in}\, W_f \;\Rightarrow f^{-1}\left[U\right] \,\text{offen in}\, D_f\right)$.

Bei Anwendung der Objektsprache erstrebt man maximale Präzision der Darstellung auf minimalem Raum durch die Beschränkung auf an anderer Stelle definierte mathematische Symbole, wodurch allerdings die Übersichtlichkeit nicht immer gesteigert wird. Aber auch in der Metasprache werden Informationen ausgelagert, indem man an anderer Stelle definierte Fachbegriffe verwendet wie z.B. „Funktion", Definitionsbereich", „Bild", Urbild" und „offen". Dadurch gelingt es, hinreichend präzise und übersichtliche Aussagen zu formulieren, die durch Ergänzungen wie „auch" und „wieder" zusätzlich betont werden können. Im folgenden Text wird wird die übliche pragmatische Mischung aus Objekt- und Metasprache verwendet, um die Vorteile beider Darstellungsarten zu nutzen.

5 Mengen und Klassen

Die Ursache für das Russell-Antinomie war die unkritische Annahme des **Abstraktionsaxioms**: Für jeden Ausdruck φ gibt es eine entsprechende Menge $m(\varphi) = \{x : \varphi(x)\}$, die genau diejenigen Elemente x enthält, für die der Ausdruck $\varphi(x)$ wahr ist. Für $\varphi(x, m(\varphi)) = x \in m(\varphi)$ erhält man im Fall $x = m(\varphi)$ allerdings eine **Unbestimmtheit** infolge eines **Zirkelbezugs**: $m(\varphi) \in m(\varphi) \Leftrightarrow m(\varphi) \in m(\varphi)$. Es lässt sich nicht klären, ob die Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Da man aber diese Frage für große Mengen wie z.B. das Universum nicht offen lassen will, formulierte **Thoralf Skolem** im Jahre 1922 die folgende Einschränkung: Der **beschreibende** Ausdruck φ darf nicht von der **zu beschreibenden** Menge $m(\varphi)$ oder gar von sich selbst **abhängig** sein. Nach wie vor erhält man aber im Fall des **Russell-Ausdrucks** $\rho(x) = x \notin x$ für $x = m(\rho)$ einen **logischen Widerspruch** in Form der **Russell-Antinomie**: $m\,(\rho) \in m(\rho) \Leftrightarrow m\,(\rho) \notin m(\rho)$. Wie in 3.1 schon bemerkt, ist die Menge $r\,(\rho) = \{x : x \notin x\}$ zu groß für eine eindeutige Charakterisierung. Die Abgrenzung einer **Menge** mittels einer bestimmten Eigenschaft ist aber nur sinnvoll, wenn nicht von vornherein alle erdenklichen Elemente dieser Eigenschaft schon genügen.

Einen wesentlichen Fortschritt brachte die bereits 1908 von **Ernst Zermelo** vorgeschlagene Einschränkung auf das

Separationsaxiom: Für jede **Grundmenge** z und jeden Ausdruck φ gibt es eine entsprechende Menge $m(\varphi, z) = \{x : x \in z \land \varphi(x)\}$, die genau diejenigen Elemente x **aus der Grundmenge** z enthält, für die der Ausdruck $\varphi(x)$ gilt.

Mit dem **Russell-Ausdruck** $\rho(x) = x \notin x$ erhält man nun die Menge $m(\rho, z) = \{x : x \in z \land x \notin x\}$.

Für $x = z$ ergibt sich $z \in r \Leftrightarrow z \in z \land z \notin z$. Da die rechte Seite falsch ist, muss auch die linke Seite falsch sein, d.h., es muss $z \notin r$ gelten: Die Grundmenge z ist nicht Element ihrer eigenen Teilmenge. Insbesondere erhält man mit der Grundmenge $z = r$ nun die eindeutige Aussage $r \notin r$. Das ist akzeptabel.

Für $x = r$ folgt $r \in r \Leftrightarrow r \in z \land r \notin r$. Wenn die linke Seite $r \in r$ wahr ist, ist $r \notin r$ falsch und damit auch die ganze rechte Seite, was zu einem Widerspruch führt. Es müssen also beide Seiten falsch sein, d.h., der linken Seite wegen gilt $r \notin r$ und damit die rechte Seite falsch bleibt, muss gelten $r \notin z$: **Es gibt keine Grundmenge** z, die groß genug ist, um die Menge aller Mengen mit $x \notin x$ als Element zu enthalten.

Wegen der Unbestimmtheit des Ausdruckes φ handelt es sich bei dem Separationsaxiom eigentlich um ein **Schema** für die Formulierung **weiterer** Axiome. Im Jahr 1922 gelang es Thoralf **S**kolem und Abraham **F**raenkel, ein System aus acht endlichen Axiomen und dem Schema des Separationaxioms aufzustellen, dass einerseits frei von direkten Widersprüchen ist und andererseits die Herleitung aller gängigen mathematischen Aussagen erlaubt. Unter den acht endlichen Axiomen ist auch das berühmte, von Ernst **Z**ermelo formulierte **Auswahlaxiom** (Axiom of **C**hoice), woraus sich die Abkürzung **ZFC** für dieses bis heute weit verbreitete Axiomensystem ableitet.

Das Separationsaxiom vermeidet logische Antinomien, indem es das Universum U aller Objekte von der Betrachtung ausschließt. Dadurch erhält man allerdings in Grenzfällen etwas unbefriedigende Aussagen wie z.B. $\bigcap \emptyset = \emptyset$: Der Durchschnitt $\bigcap x$ einer Menge x enthält nach Defintion 6.2 alle Elemente, die in allen Elementen von x enthalten sind. Für $x = \emptyset$ enthält x keine Elemente, so dass die Bedingung leer ist und auf alle Elemente zutrifft. Es müsste also eigentlich gelten $\bigcap \emptyset = U$ (vgl. Satz 7.5). In ZFC gibt es aber kein U. Abgesehen von solchen Schönheitsfehlern besteht die Motivation für die Entwicklung der Mengenlehre auch in dem Wunsch, die Grenzen der menschlichen Vorstellung zu erweitern und gerade sehr große Objekte wie das Universum U besser zu verstehen. Durch Arbeiten von John von **N**eumann (1923), Paul **B**ernays (1937) und Kurt **G**ödel (1940) wurde der übergeordnete Begriff der **Klasse** entwickelt, um auch diese größten und interessantesten Objekte etwas zugänglicher zu machen:

5.1 Definition der Menge: Eine Klasse x heißt **Menge**, wenn sie Element einer Klasse z ist, d.h., wenn $\exists z : x \in z$. Eine Klasse, welche keine Menge ist, wird als **echte Klasse** bezeichnet.

Das Separationsschema wird nun erweitert auf das

0 Klassifizierungsschema : Für jeden Ausdruck φ gibt es eine entsprechende **Klasse** $y(\varphi) = \{x : \exists z : x \in z \wedge \varphi(x)\}$, die genau diejenigen **Mengen** x enthält, für die der Ausdruck $\varphi(x)$ gilt.

Im Unterschied zum Separationsschema des ZFC-Systems darf die Grundklasse z eine echte Klasse sein und ist kein frei wählbarer Parameter mehr, sondern eine durch den Quantor $\exists$ gebundene Variable. Die Klasse der Mengen, welche dem **Russell-Ausdruck** $\rho(x) = x \notin x$ genügen, schreibt sich nun $y(\rho) = \{x : \exists z : x \in z \wedge x \notin x\}$. Mit $x = r$ ergibt sich $r \in r \Leftrightarrow \exists z : r \in z \wedge r \notin r$. Da beide Seiten falsch sein müssen, folgt $\nexists z : r \in z$: Die Klasse $y(\rho)$ ist keine Menge. Sie ist zu groß, um sie von einer anderen Menge abzugrenzen. Das ist akzeptabel. Die Überlegung $x = z$ erübrigt sich, weil die Grundmenge z von x abhängig ist und nicht willkürlich festgelegt werden darf.

Die Mengendefinition und das Klassifizierungsschema sowie acht weitere Axiome bilden die Grundlage des nach seinen Hauptentwicklern benannten **NBG**-Systems, das heute eine ähnliche Verbreitung wie ZFC gefunden hat. Man kann zeigen, dass in NBG die gleichen Sätze über **Mengen** bewiesen werden können wie in ZFC. Darüber hinaus sind aber Aussagen über **echte Klassen** formulierbar, die in ZFC nicht möglich sind. Ein eher formal-ästhetisches Argument für NBG besteht darin, dass sich das Klassifizierungsschema durch acht Spezialfälle ersetzen lässt. NBG lässt sich also durch ein **endliches Axiomensystem** von insgesamt 16 Axiomen beschreiben. Dies ist bei ZFC nicht möglich.

Aus dem Klassifizierungsschema folgt unmittelbar der

5.2 Satz über die Elementbeziehung: $x \in y(\varphi) = \{x : \exists z : x \in z \wedge \varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(x)$ und x ist eine Menge.

Klassen werden auch in diesem Text in der abgekürzten Form $y = \{x : \varphi(x)\}$ notiert. Die Klasse x mit $\varphi(x)$ ist aber nur dann Element von $y(\varphi)$, wenn sie außerdem eine Menge, d.h. Element einer übergeordneten Klasse z ist.

Die Eigenschaft $x \notin x$ als Ausdruck einer minimalen Struktur innerhalb einer Menge wird gefordert im

I Fundierungsaxiom: Jede nichtleere Klasse x besitzt ein Element, dessen Elemente nicht in x liegen.

5.3 Satz: $x \notin x$.

Beweis: Im Fall von $x \in x$ wäre x eine Menge und das **Atom** $\{x\} := \{z : \exists y : z \in y \wedge z = x\}$ (vgl. 8.1) enthielte ausschließlich das Element $x \in x$ im Widerspruch zum Fundierungsaxiom. Die Behauptung gilt auch für die leere Klasse, da sie keine Element enthält.

Im ursprünglichen NBG-System sind nicht nur die ungebundene Variable x, sondern auch etwaige gebundene Variablen in dem Ausdruck $\mu(x)$ auf Mengen beschränkt. Diese Einschränkung wird in den Lehrbüchern von **John Kelley** (1955 Anhang von *General Topology*) und **Anthony Morse** 1965 (*Set Theory*) aufgehoben, wodurch das Klassifizierungsschema so erweitert wird, dass es sich nicht mehr durch acht Spezalfälle ersetzen lässt. Sie ermöglicht aber vor allem bei den Relationen und Funktionen eine übersichtlichere Darstellung und wird daher in diesem Text übernommen.

Die im Alltag übliche Minimalbedingung für die Gleichheit zweier Mengen besteht darin, dass sie wenigstens in ihren Elementen übereinstimmen. Diese **extensionale** Auffassung wird in der Mathematik auch schon als **hinreichend** betrachtet:

II Extensionalitätsaxiom: $x = y \Leftrightarrow \forall z : z \in x \Leftrightarrow z \in y$.

Alle über die bloße Zusammensetzung hinausgehenden, etwa topologischen oder algebraischen Strukturen, welche die Elemente einer Menge ordnen, werden getrennt beschrieben und in einer übergeordneten Menge aufgeführt. Z. B. wird eine Menge $X = \{a; b\}$, auf der eine Verknüpfung $\circ : X \times X \to X$ durch $a \circ a = b \circ b = a$ und $a \circ b = b \circ a = b$ sowie ein Mengensystem $\tau = \{\emptyset; X\}$ definiert sind, als **topologische Gruppe** $G = \{X; \circ; \tau\}$ notiert. Im Alltag lässt sich dieser Ansatz etwa mit der technischen Beschreibung einer Maschine vergleichen, welche sich in eine Teileliste X , einen Bauplanτ und die Funktionsbeschreibung $\circ$ gliedert.

Dagegen hat sich die **intensionale** Auffassung der Mengenbeschreibung nicht durchsetzen können, weil die an jedes Element gebundene individuelle Definition von Anordnung, Vorgeschichte und Darstellung für praktische Zwecke zu aufwendig ist.

6 Elementare Algebra für Klassen

6.1 Definitionen: Die **kleine Vereinigung** $x \cup y := \{z : z \in x \vee z \in y\}$ ist die Menge aller Elemente, die in x **oder** y liegen und der **kleine Schnitt** $x \cap y := \{z : z \in x \wedge z \in y\}$ die Menge aller Elemente, die in x **und** y liegen. x und y sind **disjunkt**, wenn $x \cap y = \emptyset$.

6.2 Definitionen: Die **große Vereinigung** $\bigcup x := \{z : \exists y \in x : z \in y\}$ ist die Menge aller Elemente, die in **irgendeinem** Element von x liegen und der **große Schnitt** $\bigcap x := \{z : \forall y \in x : z \in y\}$ ist die Menge aller Elemente, die in **jedem** Element von x liegen. Die Mengenfamilie x wird häufig durch eine Bijektion (siehe 9.1) $I \leftrightarrow x$ mit $x_i := x(i) \forall i \in I$ auf eine wohlgeordnete (siehe 15.1) **Indexmenge** $I \subset \omega$ abgebildet. Mit $x = \{x_i : i \in I\}$ geht man über zu den Schreibweisen $\bigcup_{i \in I} x_i := \bigcup x = \{z : \exists i \in I : z \in x_i\}$ bzw. $\bigcap_{i \in I} x_i := \bigcap x = \bigcap_{i \in I} x_i = \{z : \forall i \in I : z \in x_i\}$. Die Mengenfamilie x heißt **paarweise disjunkt**, wenn $u \cap v = \emptyset \forall u, v \in x$.

6.3 Sätze über Rechenregeln für Vereinigung und Schnitt:

1. **Neutrale Elemente:** $x \cup x = x$ und $x \cap x = x$.
2. **Kommutativität**: $x \cup y = y \cup x$ und $x \cap y = y \cap x$.
3. **Assoziativität:** $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ und $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.
4. **Distributivität**: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ und $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Die Beweise zu den Rechenregeln ergeben sich durch direkte Anwendung des Klassifizierungsschemas 0 und des Extensionalitätsaxioms II. Die Rechenregeln sind hier für die kleine Version formuliert und gelten analog für die große Version. Bei intensionaler Auffassung der Gleichheit etwa unter Einbeziehung der Reihenfolge der Elemente würden Kommutativität und Assoziativität nicht mehr gelten!

6.4 Definition: $x^c := [y : y \notin x]$ ist das **Komplement** von x.

Das Komplement einer Menge ist im Allgemeinen keine Menge, sondern ein echte Klasse. Aus 5.3 folgt $x \in x^c$ und $x^c \notin x^c$ jedoch $\{x^x\} \in x^c$.

6.5 Sätze über Rechenregeln für Komplemente (de Morgan):

1. $(x^c)^c = x$
2. $(x \cap y)^c = x^c \cup y^c$
3. $(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$

Beweis zu 3.: $z \in (x \cap y)^c \overset{0,6.4}{\Leftrightarrow} z \notin x \cup y \wedge \exists u : z \in u \overset{0,6.4}{\Leftrightarrow} \neg (z \in x \wedge z \in y) \wedge \exists u : z \in u \overset{\text{Logik}}{\Leftrightarrow}$
$(z \notin x \vee z \notin y) \wedge \exists u : z \in u \overset{0,6.4}{\Leftrightarrow} z \in x^c \vee z \in y^c \overset{\text{I},6.1}{\Leftrightarrow} z \in x^c \cup y^c$.

Die konsequente Verwendung der Objektsprache verdeutlicht die typische Struktur dieses Beweises: Die Mengenaussauge wird mittels der bisher eingeführten Definitionen 6.1 und 6.4 sowie des Klassifizierungsschemas I in die rein logische Aussage $\neg (z \in x \wedge z \in y)$ übersetzt. Der Kern des Beweises besteht in der Umformulierung dieser Aussage in die Form $z \notin x \vee z \notin y$ mittels der Anwendung eines „logischen“ Schlusses auf die primitiven Konstanten $\in$ und $\vee$. Die „Logik“ dieses Schlusses ist nicht Gegenstand der Objektsprache. Er vollzieht sich im Kopf des Lesers durch exemplarische Einzelfallbetrachtungen bzw. Veranschaulichungen wie z.B. Venn-Diagramme. Anschließend wird dieses Aussage rein formal wieder in die gewünschte Mengendarstellung umgewandelt. Die Beweise der ersten beiden Aussagen sowie der meisten folgenden Sätze verlaufen analog und werden daher ausgelassen.

6.6 Definition:

1. Die **mengentheoretische Differenz** von x und y ist $x \setminus y := x \cap y^c$.
2. Die **symmetrische Differenz** von x und y ist $x \Delta y := (x \cup y) \setminus (x \cap y)$
3. $x \subset y :\Leftrightarrow \forall z : z \in x \Rightarrow z \in y$. x ist dann eine **Teilklasse** von y.

6.7 Sätze über Teilklassen:

1. $x = y \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x$
2. $x \subset y \wedge y \subset z \Rightarrow x \subset z$
3. $x \subset y \Leftrightarrow x \cup y = y \Leftrightarrow x \cap y = x$
4. $x \subset y \Leftrightarrow x \setminus y = \emptyset \Leftrightarrow y \triangle x = y \setminus x$
5. $x \subset y \Rightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x$
6. $x \in y \Rightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x$

Die **Beweise** ergeben sich durch direkte Anwendungen der Definitionen.

6.8 Definition: $2^x := \{y : y \subset x\}$ ist die **Potenzklasse** von x. Nach dem Klassifizierungsschema I enthält die Potenzklasse nur diejenigen Teilklassen von x, welche auch **Mengen** sind. Handelt es sich um eine endliche Menge mit $|x| \in \mathbb{N}$ Elementen, so enthält die Potenzklasse $|2^x| = 2^{|x|}$ Elemente, denn jede Teilmenge $y \subset x$ entspricht einer Abbildung $y : x \to \{0; 1\}$ und umgekehrt.

III Potenzmengenaxiom: Für jede **Menge** x ist die Potenzklasse 2^x wieder eine Menge und enthält **alle** Teilklassen von x.

6.9 Satz: Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge

Beweis: Nach 6.8 und III ist **jede** Teilklasse z einer Menge x ein Element der Potenzklasse 2^x und daher eine Menge.

7 Existenz von Mengen

7.1 Definition: $U := \{x : \exists y : x \in y \wedge x = x\}$ ist das **Universum**. Es enthält genau die Mengen, die im extensionalen Sinn eindeutig beschrieben werden können. Für jede Klasse $x \in U$ und jedes Element y gilt entweder$y \in x$ oder $y \notin x$.

7.2 Satz: Das Universum ist die Klasse aller Mengen. Es ist eine echte Klasse und identisch mit der **Russell-Klasse**: $U = \{x : \exists y : x \in y \wedge x \notin x\}$.

Beweis:

Jedes $x \in U$ ist nach Definition 5.1 eine Menge. Umgekehrt ist jede Menge x Element einer Klasse z. Über die Zugehörigkeit zu einer Klasse z kann aber nur dann eindeutig entschieden werden, wenn für jedes Element y bestimmt werden kann, ob entweder $y \in x$ oder $y \notin x$ gilt. Es muss daher $x = x$ gelten und nach dem Klassifizierungsschema I folgt $x \in U$. Nach 5.3 gilt $U \notin U$ und insbesondere ist U keine Menge. Wieder nach 5.3 ist auch die Russell-Klasse die Klasse aller Mengen und damit identisch mit U.

7.3 Definition: $\emptyset := \{x : \exists y : x \in y \wedge x \neq x\}$ heißt **leere Klasse** .

7.4 Satz: Die leere Klasse enthält keine Elemente.

Beweis: Angenommen, $x \in \emptyset \overset{7.2}{\Rightarrow} x \in U \overset{7.1}{\Rightarrow} x = x \overset{7.3}{\Rightarrow} x \notin \emptyset$.

Die Existenz einer Menge kann nicht bewiesen werden und wird im **Unendlichkeitsaxiom VIII** postuliert, welches aber noch viel weitergehende Forderungen umfasst und daher auf den Abschnitt 12 verschoben wird. Alle bis dahin behandelten Aussagen sind auch gültig (wenn auch inhaltsleer), wenn $\emptyset = U$. Die Aussagen $\emptyset \neq U$ und insbesondere „$\emptyset$ ist eine Menge“ können im Beweis des folgenden Satzes also nicht vorausgesetzt werden!

7.5 Sätze über das Universum und die leere Klasse:

1. $\emptyset^c = U$ und $U^c = \emptyset$
2. $\emptyset \subset x$ und $x \subset U$
3. $x \cap \emptyset = \emptyset$ und $x \cap U = x$
4. $x \cup \emptyset = x$ und $x \cup U = U$
5. $\bigcap \emptyset = U$ und $\bigcap U = \emptyset$
6. $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcup U = U$

Beweis:

1. klar
2. klar
3. $\bigcap \emptyset = U$, denn $x \in \bigcap \emptyset \overset{0,6.2}{\Leftrightarrow} \forall y : y \in \emptyset \Rightarrow x \in y \wedge \exists z : x \in z \overset{7.4}{\Leftrightarrow} \exists z : x \in z \overset{7.2}{\Leftrightarrow} x \in U$.
4. $\bigcap U = \emptyset$, denn angenommen, es gäbe eine Menge x mit $\emptyset \subset x \in \bigcap U \overset{6.9}{\Rightarrow} \emptyset$ ist eine Menge $\overset{7.2}{\Rightarrow} \emptyset \in U \overset{6.2}{\Rightarrow} \bigcap U \subset \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme.
5. $\bigcup \emptyset = \emptyset$, denn $x \in \bigcup \emptyset \overset{0,6.2}{\Leftrightarrow} \exists y : y \in \emptyset \wedge x \in y \overset{7.4}{\Rightarrow} \bigcup \emptyset \subset \emptyset$ und $\emptyset \overset{7.4}{\subset} \bigcup \emptyset$.
6. $\bigcup U = U$, denn $x \in U \overset{7.2}{\Rightarrow}$ x ist eine Menge $\overset{III}{\Rightarrow} x \in 2^x \in U \overset{0,6.2}{\Rightarrow} x \in \bigcup U \Rightarrow U \subset \bigcup U$ und $\bigcup U \overset{7.2}{\subset} U$.

7.6 Satz: Für alle $x \neq \emptyset$ ist $\bigcap x$ eine Menge.

Beweis: $x \neq \emptyset \overset{7.4}{\Rightarrow} \exists y : y \in x \overset{6.2}{\Rightarrow} \bigcap x \subset y \overset{6.9}{\Rightarrow} \bigcap x$ ist eine Menge.

7.7 Satz: $2^U = U$.

Beweis: $x \in 2^U \overset{7.4}{\Rightarrow} x \in U$ und umgekehrt $x \in U \overset{7.5}{\Rightarrow} x \subset U \overset{6.9}{\Rightarrow} x \in 2^U$.

IV Kleines Vereinigungsaxiom: Mit x und y ist auch ihre Vereinigung x ∪ y eine Menge.

7.8 Satz: Das Komplement x^c einer Menge ist keine Menge: $x \in U \Leftrightarrow x^c \notin U$

Beweis: Wäre auch das Komplement x^c einer Menge x eine Menge, so müsste nach dem kleinen Vereinigungsaxiom auch das Universum $U = x \cup x^c$ eine Menge sein im Widerspruch zu 7.8.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Ordnung von (bis auf weiteres hypothetischen) Mengen durch **Relationen** und **Funktionen**. Diese führen zur mengentheoretischen Herleitung des Zählens mittelst der **Ordinalzahlen**. Die für die Konstruktion der Ordinalzahlen benötigten „geschachtelten" Mengen werden im **Unendlichkeitsaxiom VIII** postuliert. Die endlichen Ordinalzahlen entsprechen den **natürlichen Zahlen**. Für den Vergleich unendlich großer Mengen verwendet man die ebenfalls aus den Ordinalzahlen abgeleiteteten **Kardinalzahlen** und benötigt dafür ein letztes Axiom, das **Auswahlaxiom IX**.

8 Relationen

Die Konstruktion von geordneten Paaren auf einer zunächst völlig amorphen Menge ist mit gewissem technischen Aufwand verbunden. Die Beweise zu den folgenden Sätzen ergeben sich durch rein mechanische Anwendung der Rechenregeln aus Abschnitt 6 und werden hier nicht dargestellt. Entscheidend ist der Satz 8.8 über die Eindeutigkeit der geordneten Paare.

8.1 Definition: $\{x\} = \{z : x \in U \Rightarrow z = x\}$ wird **Atom** x genannt. Ist x eine Menge, so ist $\{x\}$ die Klasse, deren einziges Element x ist. Wegen $x \in 2^x$ folgt in diesem Fall $\{x\} \in 2^x$. Insbesondere ist $\{x\}$ dann ebenfalls eine Menge und es gilt $\bigcup \{x\} = \bigcap \{x\} = x$. Ist x keine Menge, so gilt $x \notin U$ und daher $\{x\} = \bigcup \{x\} = U$ und $\bigcap \{x\} = \emptyset$.

8.2 Definition: $\{x; y\} := \{x\} \cup \{y\}$ heißt **ungeordnetes Paar** von x und y. Wegen 8.1 und IV ist $\{x; y\}$ **genau dann** eine Menge, **wenn** dies auch für x **und** y gilt und in diesem Fall ist $z \in \{x; y\} \Leftrightarrow z = x \vee z = y$. Nach 8.1 gilt $\{x; y\} = U$ **genau dann, wenn** x **oder** y keine Menge ist.

8.3 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $\bigcap\{x; y\} = x \cap y$ und $\bigcup\{x; y\} = x \cup y$. Ist x **oder** y keine Menge, so gilt $\bigcap\{x; y\} = \emptyset$ und $\bigcup\{x; y\} = U$.

8.4 Definition: $(x; y) := \{\{x\}; \{x; y\}\} = \{\{x\}\} \cup \{\{x; y\}\} = \{\{x\}\} \cup \{\{x\} \cup \{y\}\}$ heißt **geordnetes Paar**. Wegen 8.2 und IV ist $(x; y)$ **genau dann** eine Menge, **wenn** dies auch für x **und** y gilt. Nach 8.2 gilt $(x; y) = U$ **genau dann, wenn** x **oder** y keine Menge ist.

8.5 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $\bigcup(x; y) = \{x; y\}$, $\bigcap(x; y) = \{x\}$, $\bigcup\bigcap(x; y) = \bigcap\bigcap(x; y) = x$, $\bigcup\bigcup(x; y) = x \cup y$ und $\bigcap\bigcup(x; y) = x \cap y$. Ist x **oder** y **keine** Menge, so gilt $\bigcup\bigcap(x; y) = \bigcap\bigcup(x; y) = \emptyset$ und $\bigcup\bigcup(x; y) = \bigcap\bigcap(x; y) = U$.

8.6 Definition: $p_1(z) := \bigcap\bigcap z$ ist die erste und $p_2(z) := (\bigcap\bigcup z) \cup ((\bigcup\bigcup z) \setminus (\bigcup\bigcap z))$ die zweite **Koordinate** von z.

8.7 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $p_1(x; y) = x$ und $p_2(x; y) = y$. Ist x **oder** y **keine** Menge, so gilt $p_1(x; y) = p_2(x; y) = U$.

8.8 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $(x; y) = (u; v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

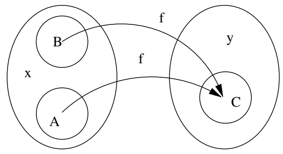
8.9 Definitionen: R heißt **Relation**, wenn für jedes $z \in R$ zwei **Klassen** x und y existieren mit $z = (x; y)$. Eine Relation ist also eine Klasse geordneter Paare. Für $(x; y) \in R$ schreibt man auch xRy. Ihre **Inverse** ist $R^{-1} := \{(x; y) : (x; y) \in R\}$. Damit folgt $(R^{-1})^{-1} = R$. Zwei Relationen lassen sich **verketten** gemäß $S \circ R := \{(x; y) : \exists y : (x; y) \in R \wedge (y; z) \in R\}$. Die Verkettung ist **assoziativ** mit $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$. Offensichtlich gilt $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.Spezielle Relationen sind die **Produktklasse** $x \times y := \{(u; v) : u \in x \wedge v \in y\}$ und die **Diagonale** $\Delta := \{(x; y) : x = y\}$. Eine Relation R heißt **reflexiv**, wenn $\Delta \subset R$; **symmetrisch**, wenn $R = R^{-1}$; **antisymmetrisch**, wenn $R \cap R^{-1} = \Delta$ und **transitiv**, wenn $R \circ R \subset R$. Man nennt sie **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Klasse $R(x) := \{y : (x; y) \in R\}$ ist dann die **Äquivalenzklasse** von x. Aus der **Reflexivität** folgt $x \in R(x)$. Wegen der **Symmetrie** und der **Transitivität** ist $xRy \Leftrightarrow R(x) = R(y)$ und $\neg xRy \Leftrightarrow R(x) \cap R(y) = \emptyset$. Für eine Äquivalenzrelation $R \subset x \times x$ ist die **Quotientenmenge** $x \setminus R := \{R(u) : u \in x\}$ aller Äquivalenzklassen eine Familie paarweise disjunkter Mengen mit $x = \bigcup x \setminus R$.

9 Funktionen

9.1 Definitionen: Eine Relation f heißt **Funktion**, wenn gilt: $(x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Rightarrow y = z$. Eine Funktion ist also eine Relation, deren zweite Koordinate durch die erste Koordinate eindeutig bestimmt wird. Sie wird daher als **Wert** $f(x) := \bigcap \{y : \exists x : (x; y) \in f\}$ von f an der Stelle x bezeichnet. Die Klasse $D_f := \{x : \exists y : (x; y) \in f\}$ heißt **Definitionsbereich**. Nach Satz 7.4 gilt $x \notin D_f \Rightarrow f(x) = \bigcap \emptyset = U$: der Funktionswert ist **unbestimmt**. Nach 8.1 gilt andernfalls $x \in D_f \Leftrightarrow \bigcap \{y\} = y$ mit $(x; y) \in f$. Insbesondere ist für jedes $x \in D_f$ der Wert $f(x)$ eine **Menge**. Die Funktion lässt sich also in der Form $f = \{(x; y) : y = f(x)\}$ beschreiben. Außerdem definiert man das **Bild** $f[x] := \{y : \exists u \in x : (u; y) \in f\}$ einer Klasse x unter f. Das Bild $f[D_f]$ wird **Wertebereich** genannt. Man schreibt dann $f : D_f \to f[D_f]$. Beschränkt man die Definition auf eine Menge $A \subset D_f$, so erhält man die **Restriktion** $f|A : A \to f[A]$. Häufig ist vom Wertebereich $f[A]$ nur bekannt, dass er in einer eventuell größeren Menge B liegt. Man schreibt dann $f : A \to B$ und nennt f **surjektiv**, wenn $f[A] = B$. Die Funktion f heißt **injektiv**, wenn gilt: $(x; y) \in f \wedge (u; y) \in f \Rightarrow x = u$. Dann lässt sich die erste Koordinate eindeutig aus der zweiten Koordinate bestimmen und die **Umkehrfunktion**

f^{-1} ist ebenfalls wieder eine Funktion. Schließlich heißt sie **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall ist $f^{-1}[B] = A$.

9.2 Satz: Für eine Funktion $f : X \to Y$ und alle $A, B \subset X$ sowie $C \subset Y$ gilt



1. $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ und $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$
2. $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ und $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
3. $f^{-1}[Y \setminus C] = X \setminus f^{-1}[C]$ und $f[X \setminus A] \supset f[X] \setminus f[A]$
4. f ist **injektiv** $\Leftrightarrow f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ für alle $A, B \subset X$.
5. f ist **injektiv** $\Leftrightarrow f[X \setminus A] = f[X] \setminus f[A]$ und **bijektiv** $\Leftrightarrow f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$ für alle $A \subset X$.

9.3 Satz: $f = g \Leftrightarrow \forall x : f(x) = g(x)$.

Zwei Funktionen f und g sind gleich, wenn ihre Werte an **jeder** Stelle x übereinstimmen. Der Beweis verwendet ausschließlich die Definitionen und Aussagen aus 9.1. Die Fallunterscheidung $x \in D_f$ bzw. $x \notin D_f$ ist vor allem dann von Bedeutung, wenn g eine **Fortsetzung** von f ist, d.h., wenn $f \subset g$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei $f = g$: Falls $x \in D_f \Rightarrow \exists y : (x; y) \in f$ mit $y = f(x) \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} (x; y) \in g$ mit $y = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$. Falls $x \notin D_f \Rightarrow f(x) = U \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} g(x) = U$.

$\Leftarrow$: Sei $f \neq g$ und o.B.d.A $(x; y) \in f \setminus g$ mit $y = g(x)$. Falls $x \in D_g \Rightarrow \exists z : (x; z) \in g$ mit $z = g(x)$ $\overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$ $f(x) = y \neq z = g(x)$. Falls $x \notin D_g$, folgt $g(x) = U$ und da nach Vor. $f(x) = y \in U$ ergibt sich wieder $f(x) \neq g(x)$.

Für den folgenden Satz über Produktmengen benötigt man gleich zwei Axiome:

V Ersetzungsaxiom: Das Bild $f[x]$ einer Menge x ist wieder eine Menge.

VI Großes Vereinigungsaxiom: Die Vereinigung $\bigcup x$ der Elemente einer Menge x ist wieder eine Menge.

Das kleine Vereinigungsaxiom IV lässt sich nicht aus dem großen Vereinigungsaxiom VI herleiten, weil sich die kleine Vereinigung nicht durch die große Vereinigung ersetzen lässt: $x \cup y = \bigcup(\{x\} \cup \{y\})$.

9.4 Satz: Für zwei Mengen x und y ist auch ihr Produkt $x \times y$ eine Menge.

Beweis: Für jedes $u \in x$ ist $f_u[y] = \{u\} \times y$ das Bild der auf y definierten Funktion f mit $f_u(v) = (u; v)$ und nach Axiom V daher eine Menge. Das Bild der auf x definierten Funktion g mit $g(u) = \{u\} \times y$ ist dann nach Axiom V ebenfalls eine Menge. Nach Axiom VI ist $x \times y = \bigcup\{\{(u; v) : \exists v : v \in y\} : \exists u : u \in x\} = \bigcup\{\{u\} \times y : \exists u : u \in x\} = \bigcup g[x]$ dann wieder eine Menge.

9.5 Satz: Ist der Definitionsbereich einer Funktion f eine Menge, so ist auch f eine Menge.

Beweis: Mit Axiom V und Satz 9.4, denn $f \subset D_f \times f[D_f]$.

9.6 Definition: $y^x := \{f : x \to y$ ist eine Funktion$\}$.

Handelt es sich um endliche Mengen mit $|x| \in \mathbb{N}$ bzw. $|y| \in \mathbb{N}$ Elementen, so gilt $|y^x| = |y|^{|x|}$.

9.7 Satz: Für zwei Mengen x und y ist auch y^x eine Menge.

Beweis: Jedes $f \in y^x$ ist nach Satz 9.5 Teilmenge von $x \times y$ und nach dem Potenzmengenaxiom III sowie Satz 9.4 folgt $f \in 2^{x \times y}$ und $2^{x \times y}$ ist eine Menge. Damit folgt $y^x \subset 2^{x \times y}$ und nach Satz 6.9 ist y^x eine Menge.

10 Ordnungen

10.1 Definitionen: Eine Relation $\leq$ heißt **Ordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das geordnete Paar $(A;\leq)$ mit $\leq\in A\times A$ heißt dann geordnete Klasse. Für eine geordnete Klasse $(A;\leq)$ unterscheidet man das **kleinste Element** $a_0\in A$, wenn $\forall a\in A: a_0\leq a$ und das **minimale Element** $b_0\in A$, wenn $\forall a\in A: a\leq b_0\Rightarrow a=b_0$. Entsprechendes gilt für das **größte** und das **maximale Element** von A. Für eine Teilmenge $B\subset A$ nennt man $b_0\in A$ eine **untere Schranke** von B, wenn $\forall b\in B: b_0\leq b$. Die größte untere Schranke heißt **Infimum** $\inf B$. Entsprechend definiert man die **obere Schranke** und das **Supremum** $\sup B$. Eine Klasse ist **beschränkt**, wenn sie sowohl eine obere als auch eine untere Schranke besitzt. Eine geordnete Klasse$(A;\leq)$ heißt **linear geordnet**, wenn $\leq\cup\leq^{-1}=A\times A$. Sie heißt **vollständig geordnet**, wenn jede nicht leere und nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Schließlich ist $(A;\leq)$ **wohlgeordnet**, wenn jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

10.2 Sätze und Beispiele:

1. Jedes kleinste Element einer geordneten Klasse ist auch minimal. Bei einer linear geordneten Menge ist es eindeutig bestimmt.
2. Eine linear geordnete Klasse ist genau dann vollständig, wenn jede nicht leere und nach unten beschränkte Teilmenge ein **Infimum** besitzt. Das gesuchte Infimum ist das Supremum der nicht leeren Menge der unteren Schranken der Teilmenge. Umgekehrt erhält man das Supremum einer nicht leeren nach oben beschränkten Menge als Infimum der nicht leeren Menge der oberen Schranken der Teilmenge.
3. Jede wohlgeordnete Menge wie z.B. die **natürlichen Zahlen** $(\mathbb{N};\leq)$ ist auch linear geordnet.
4. Die **reellen Zahlen** $(\mathbb{R};\leq)$ sind vollständig geordnet, aber nicht wohlgeordnet.
5. Die **rationalen Zahlen** $(\mathbb{Z};\leq)$ sind linear geordnet, aber weder vollständig noch wohlgeordnet.
6. Die **Potenzmenge der natürlichen Zahlen** $2^{\mathbb{N}}$ wird durch die **Inklusion** $\subset$ geordnet und besitzt dann ein **größtes Element** $\mathbb{N}$. Damit ist jede Teilmengenfamilie $A\subset 2^{\mathbb{N}}$ beschränkt. Ihr **Supremum** ist die Vereinigung $\bigcup A$. $\left(2^{\mathbb{N}};\subset\right)$ ist aber weder linear noch wohlgeordnet.

10.3 Definitionen: Auf einer **linear geordneten** Klasse $(A;\leq)$ mit $x<y:\Leftrightarrow x\leq y\wedge x\neq y$ defniert man die **Intervallschreibweise** : $[a;b]:=\{x\in A: a\leq x\leq b\}$, $]a;b]:=\{x\in A: a<x\leq b\}$, $]-\infty;b]:=\{x\in A: x\leq b\}$, usw.. Die Teilmenge $B\subset A$ liegt **dicht** in A, wenn $\forall x;y\in A: x<y\Rightarrow\exists z\in B: x<z<y$. Insbesondere ist dann jedes **offene** Intervall $]a;b[\,\subset B$ mit $x<y$ nicht leer. Ein **Schnitt** S ist definiert als **nichtleere echte Teilmenge** $\emptyset\neq S\subsetneq A$ mit **Intervallcharakter**, d.h., $\forall x\in S:\forall a\in A: a\leq x\Rightarrow a\in S$. Ein **offener** Schnitt hat **kein größtes Element**. Für $a\in\mathbb{R}$ ist also $]-\infty;a]$ ein Schnitt und $]-\infty;a[$ ein offener Schnitt. Sind $(A;\leq)$ und $(B;\preccurlyeq)$ zwei **linear** geordnete Klassen, so heißt die Funktion $f:A\to B$ **monoton**, wenn $\forall x;y\in A: x\leq y\Leftrightarrow f(x)\preccurlyeq f(y)$ und **streng monoton** wenn $x<y\Leftrightarrow f(x)\prec f(y)$. Eine **streng monotone** Funktion ist **injektiv** und ihre **Umkehrung** $\mathrm{f}^{-1}: f[A]\to A$ ist wieder streng monoton. Ist die Funktion auch **surjektiv**, so heißen $(A;\leq)$ und $(B;\preccurlyeq)$ **isoton** zueinander. Eine **streng montone** Funktion $f:A\to B$ ist eine **Einbettung**, wenn das Bild $f[A]$ **dicht** in B liegt. Die Funktion $\overline{f}:A\to B$ heißt **Fortsetzung** der Funktion $f:A_0\to B$, wenn $A_0\subset A$ und $f\subset\overline{f}$. Umgekehrt heißt $f|A_0$ **Restriktion** von f auf A_0, wenn $A_0\subset A$ und $f|A_0\subset f$.

Der folgenden Satz wird für die Vervollständigung der **rationalen Zahlen** in Abschnitt 13.3. benötigt.

10.4 Satz über die Vervollständigung einer linearen Ordnung: Jede **linear geordnete** Klasse $(X;\leq)$ ist isoton zu einer Teilmenge einer **vollständig geordneten** Klasse $(Y;\preccurlyeq)$. Ist $(X;\leq)$ **in sich dicht**, so lässt sie sich in $(Y;\preccurlyeq)$ einbetten.

Beweis: Sei $(X;\leq)$ linear geordnet und $(Y;\subset)$ die durch Inklusion linear geordnete Klasse der Schnitte auf A. Die Schnitte sind auch vollständig geordnet, denn für jede Familie von Schnitten $A\subset Y$ mit der oberen Schranke $S\in Y$ ist wegen $a\subset S\;\forall\, a\in A$ auch ihre Vereinigung $\bigcup A\subset S\subsetneq Y$ ein Schnitt und außerdem Supremum von A. $f:X\to Y$ mit $f(x):=\,]-\infty;x[$ ist wohldefiniert und streng monoton. Für **in sich dichtes** X geht man über zu den durch Inklusion ebenfalls vollständig geordneten **offenen** Schnitten $(Y';\subset)$. Dann liegt $f[X]$ dicht in Y, denn für zwei offene Schnitte $A \subsetneq B$ existiert ein $x \in B \setminus A$ sowie ein weiteres $y \in B \setminus A$ mit $x < y$ und es folgt $A \subsetneq]-\infty; y[\subsetneq B$.

Der folgende Satz entspricht dem Sätzen 7.13 und 8.5 in [**8, 11. Topologie**] über die **Fortsetzung stetiger Funktionen:**

10.5 Satz über die eindeutige Fortsetzung einer monotonen Funktion: Die Einbettung $f : X_0 \to Y$ auf einer dichten Teilmenge $X_0 \subset X$ einer linear geordneten Klasse $(X;\leq)$ hat genau dann eine eindeutig bestimmte, streng monotone Fortsetzung $\overline{f} : X \to Y$ in eine vollständig geordnete Klasse $(Y;\preccurlyeq)$, wenn für jedes beschränkte $A \subset X_0$ auch das Bild $f[A]$ beschränkt ist.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei $\overline{f}$ die streng monotone Fortsetzung von f und $A \subset X_0$ mit der unteren Schranke $a \in X$ und der oberen Schranke $b \in X$. Wegen der strengen Monotonie von $\overline{f}$ und $f \subset \overline{f}$ ist dann $\overline{f}(a)$ eine untere und $\overline{f}(b)$ eine obere Schranke von $f[A]$.

$\Leftarrow$: Sei $x \in X$ gegeben. Falls $S_x := X_0 \cap]-\infty; x[\neq \emptyset$, wähle ein $y \in S_x$. Da X_0 dicht in X, ist $X_0 \cap]y;x[\neq \emptyset$ mit $y = \inf (X_0 \cap]y;x[)$ und $x = \sup (X_0 \cap]y;x[) = \sup S_x$. Nach Voraussetzung ist auch das Bild $f[X_0 \cap]y;x[]$ beschränkt und wegen der Vollständigkeit von $(Y;\preccurlyeq)$ existiert $\overline{f}(x) := \sup f[X_0 \cap]y;x[]$. Ist $S_x = \emptyset$, so ist $x = \inf X_0$, denn X_0 liegt dicht in X. Für ein beliebiges $y \in X_0$ existiert aus den gleichen Gründen wie im ersten Fall $\overline{f}(x) := \inf f[X_0 \cap]x;y[]$. $\overline{f}$ ist eine Fortsetzung von f , denn für $x \in X_0$ und $S_x \neq \emptyset$ gilt $f(x) = f(\sup S_x) = \sup f[S_x] = \overline{f}(x)$ wegen der strengen Monotonie von f und weil $f[X_0]$ dicht in Y. Für $S_x = \emptyset$ folgt aus den gleichen Gründen $f(x) = f(\inf X_0) = \inf f[X_0] = \overline{f}(x)$. $\overline{f}$ ist streng monoton, denn für $x < y$ und $S_x \neq \emptyset$ folgt wegen $X_0 \cap]x;y[\neq \emptyset$ und X_0 dicht in X auch $S_x \subsetneq S_y \neq \emptyset$ und daher $\overline{f}(x) = \sup f[S_x] < \sup f[S_y] = \overline{f}(y)$. Im Fall $S_x = \emptyset$ ist $S_y \cap X_0 \neq \emptyset$ und $\overline{f}(x) = \inf f[X_0] < \sup f[S_y] = \overline{f}(y)$. $\overline{f}$ ist auch eindeutig, denn für eine weitere streng monotone Fortsetzung $\hat{f}$ von f mit o.B.d.A. $\hat{f}(x) < \overline{f}(x)$ für ein $x \in X$ gibt es wegen $f[X_0]$ dicht in Y ein $y \in X_0$ mit $\hat{f}(x) < f(y) < \overline{f}(x)$. Da $(X;\leq)$ linear geordnet ist, gilt dann entweder $x < y$ oder $y < x$ im Widerspruch zur geforderten strengen Monotonie von $\hat{f}$ oder $\overline{f}$.

Die beiden folgenden Sätze werden für die Entwicklung der **Kardinalzahlen** im Abschnitt 15 benötigt:

10.6 Satz: Seien$(X;\leq)$ und $(Y;\preccurlyeq)$ zwei wohlgeordnete Klassen. Zwei streng monotone Funktionen f und $\overline{f}$, deren Bilder $f[A]$ und $\overline{f}[A]$ eines beliebigen Schnittes $A \subset X$ wieder Schnitte auf Y sind, stimmen auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein: $f \subset \overline{f}$ oder umgekehrt.

Beweis: Sei $A :=]-\infty; x_0[$ für ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) \neq \overline{f}(x_0)$ und $x_1 \in A$ das n.Vor. existierende kleinste Element der Menge $\left\{x \in X : f(x) \neq \overline{f}(x)\right\}$. Da $(Y;\preccurlyeq)$ linear geordnet ist, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $f(x_1) \prec \overline{f}(x_1) \in \overline{f}[A]$ und da $\overline{f}[A]$ wieder ein Schnitt ist, gilt auch $f(x_1) \in \overline{f}[A]$. Wegen der strengen Monotonie folgt $x_2 := \overline{f}^{-1}(f(x_1)) < \overline{f}^{-1}\left(\overline{f}(x_1)\right) = x_1$ und daher $f(x_2) = \overline{f}(x_2) = f(x_1)$ im Widerspruch zu $x_2 < x_1$.

10.7 Satz: Seien $(X;\leq)$ und $(Y;\preccurlyeq)$ zwei wohlgeordnete Klassen. Dann ist X isoton zu Y oder einem Schnitt in Y oder umgekehrt. Der zweite Fall tritt immer ein, wenn Y keine Menge ist.

Beweis: Sei G die Menge der streng monotonen Funktionen $g : D_g \to Y$, deren Definitionsbereiche $D_g \subset X$ Schnitte auf X sind und deren Bilder $g[A]$ von beliebigen Schnitten $A \subset X$ auch wieder Schnitte auf Y sind. Da X und Y wohlgeordnet sind, ist G nicht leer: Für die kleinsten Elemente $x_0 \in X$, $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$,... bzw. $y_0 \in Y$, $y_1 \in X \setminus \{y_0\}$, ... ist z.B. $g : X \to Y$ mit $g(x_0) := y_0$, $g(x_1) := y_1$, ... ein Element von G. Dann ist $f : X \to Y$ mit $f(x) := g(x)$ für ein $g \in G$ nach Satz 10.6. wohldefiniert, streng monoton und bildet Schnitte wieder auf Schnitte ab. Ihr Definitionsbereich $D_f = \bigcup \{D_g : g \in G\}$ ist ebenfalls ein Schnitt. Im Fall von $D_f \subsetneq X$ und $f[D_f] \subsetneq Y$ gibt es die kleinsten Elemente $x_0 \in X \setminus D_f$ und $y_0 \in Y \setminus f[D_f]$ und nach der Definition von f gilt $f :]-\infty; x_0[\to]-\infty; y_0[$. Dann ist $\overline{f} := f \cup (x_0; y_0) :]-\infty; x_0] \to]-\infty; y_0]$ wieder streng monoton und die Mengen $]-\infty; x_0]$ bzw. $]-\infty; y_0]$ sind Schnitte in X und Y im Widerspruch zur Definition von f. Also muss gelten $D_f = X$ oder $f[D_f] = Y$. Ist Y keine Menge, so ist wegen des Ersetzungsaxiom V der zweite Fall ausgeschlossen.

11 Ordinalzahlen

In diesem Abschnitt werden abzählbare und wohlgeordnete Mengen konstruiert, die später auf die natürlichen Zahlen führen. Wie in Abschnitt 7 schon erwähnt, kann die Existenz irgendwelcher Mengen bisher und auch später nicht bewiesen werden. Falls es aber Mengen gibt, fordern wir an dieser Stelle ein Mindestmaß an Ordnung und Hierarchie in ihrer Struktur, um die angekündigte Konstruktion durchführen zu können:

11.1 Satz: Es gibt keine zwei Klassen x und y mit $x \in y$ und $y \in x$.

Beweis: Wende das Fundierungsaxiom I auf das ungeordnete Paar $\{x; y\}$ an.

Aus dem Fundierungsaxiom lässt sich außerdem schließen, dass es **keine unendlich kleinen Mengen** geben kann. Jede Kette der Gestalt $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ldots$ hat einen Abschluss x_n. Zum Beweis wendet man das Fundierungsaxiom I auf die Folge $\{x_0; x_1; x_2; \ldots\}$ an. Dazu muss dieses Folge bzw. die entsprechende Funktion auf den natürlichen Zahlen aber erst sauber definiert werden. Dies geschieht mit Hilfe des Begriffes der Ordinalzahlen:

11.2 Definitionen: Eine Klasse x heißt **Ordinalzahl**, wenn sie durch die Relation $u \leq v :\Leftrightarrow u \in v \vee u = v$ linear geordnet wird. Die Transivitivität von $\leq$ bedeutet, dass jedes Element $y \in x$ auch Teilmenge $y \subset x$ ist. Damit wird jedes solche Element $y \in x$ durch $\leq$ wieder linear geordnet und ist daher **selbst wieder Ordinalzahl**. Eine Ordinalzahl wird durch $\leq$ sogar **wohlgeordnet**, denn für jede Teilmenge $y \subset x$ existiert nach dem **Fundierungsaxiom** ein $u \in y$ mit $u \cap y = \emptyset$, d.h. $\forall z \in y : u \in z$ so dass u das kleinste Element von y ist. Das kleinste Element von x ist dann eine Teilmenge $u \subset x$ mit $u \cap x = \emptyset$, d.h. $u = \emptyset$. Jede Ordinalzahl muss also die **leere Menge** enthalten, welche dann auch das kleinste Element ist. Für jede Ordinalzahl x ist $x + 1 := x \cup \{x\}$ wieder eine Ordinalzahl, denn jedes Element von $x+1$ ist entweder schon Element von x oder x selbst und $x+1$ ist offensichtlich wieder wohlgeordnet mit dem kleinsten Element $\emptyset$ und dem größtem Element x. Aus der gleichen Betrachtung folgt auch, dass $x+1$ die kleinste Ordinalzahl ist, die x enthält. x heißt daher der **Vorgänger** von $x + 1$ und $x + 1$ ist der **Nachfolger** von x. Die einfachsten Ordinalzahlen sind dann $0 := \emptyset$; $1 := \{\emptyset\}$;$2 := 1 \cup \{1\} = \{0; 1\}$; $3 := 2 \cup \{2\} = \{0; 1; 2\}$, usw.. Die **Klasse der Ordinalzahlen** wird mit ω bezeichnet. Die **Existenz** eines Atoms $\{\emptyset\}$ und aller weiterer Ordinalzahlen wird allerdings erst in Abschnitt 12 zusammen mit den **natürlichen Zahlen** durch das **Unendlichkeitsaxiom** VIII postuliert.

11.3 Satz:

1. Für zwei Ordinalzahlen y und x gilt $y \subsetneq x \Leftrightarrow y \in x$.
2. Jede Ordinalzahl x lässt sich als Vereinigung $x = \bigcup (x + 1)$ schreiben.
3. Jede Ordinalzahl x lässt sich als Schnitt $x = [\emptyset; x[$ schreiben.
4. Die Klasse ω aller Ordinalzahlen ist selbst eine Ordinalzahl, aber keine Menge.

Beweis:

1. Zu zeigen ist nur: Für jede echte Teilmenge $y \subsetneq x$ einer Ordinalzahl x, welche ebenfalls Ordinalzahl ist, gilt $y \in x$. Sei dazu $z \in x \setminus y$ gegeben, dann gilt $y \subset z$, denn aus $z \in u \in y$ für ein $u \in y$ würde $z \in y$ folgen. Für das in Bezug auf $\leq$ **kleinste** solche $z \in x \setminus y$ gilt außerdem $u \in z \Rightarrow u \in y$, also $z \subset y$ und damit $y = z \in x$.
2. \- 4. folgen aus 1..

Wichtigste Hilfsmittel bei der Verwendung von Ordinalzahlen sind die **rekursive Definition** von Funktionen und das Beweisprinzip der **transfiniten Induktion**. Zunächst wird gezeigt, dass die rekursive Definition der Funktion $f : x \to A$ auf einer Ordinalzahl x mittels der Rekursionsregel g **eindeutig** ist. Die **Rekursionsregel** $g : D_g \to A$ gibt an, wie man von den Funktionswerten der **Elemente** einer Ordinalzahl $u \in x$ auf den Funktionswert $f(u)$ für u selbst gelangt. Wegen $u = [\emptyset; u[$ wird dabei von den Funktionswerten f|u **aller** vorangehender Ordinalzahlen $v \in u$ auf u selbst geschlossen: $f(u) = g\,(f|u)$. Die ersten Funktionswerte sind also $f\,(\emptyset) = g\,(f|\emptyset) =$

$g(\emptyset)$,$f(1) = g(f|1) = g((\emptyset; f(\emptyset)))$, $f(2) = g(f|2) = g(\{(\emptyset; f(\emptyset)); (1; f(1))\})$, $f(3) = g(f|3) = g(\{(\emptyset; f(\emptyset)); (1; f(1)); (2; f(2))\})$, usw. Sobald ein $u \in x$ erreicht wird mit $f|u \notin D_g$, folgt $f(u) = U$ und wegen $(u; f(u)) = (u; U) = U \notin D_g$ gilt dies dann auch für alle folgenden Ordinalzahlen $v \ni u$. Entsprechend ist dann der Definitionsbereich von f eingeschränkt auf $D_f = [\emptyset; u[$. Erst mit $D_g = \bigcup_{u \in x} A^u$ erreicht man $D_f = [\emptyset; x[$. Dabei kann sich der Informationsgehalt der Rekursionsregel durchaus auf wenige der vorangegangenen Funktionswerte beschränken. Unter Verwendung der im nächsten Abschnitt axiomatisch begründeten **natürlichen Zahlen** $x = \mathbb{N} \in \omega$ (Satz 12.3) kann man z.B. die **Fibonacci-Folge** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschreiben durch die Rekursionsregel $g : \bigcup_{u \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^u \to \mathbb{N}$ mit $g(0) = g(1) = 1$ und $f(u+2) = g(f|u+2) := f(u) + f(u+1)$. Die Rekursionsregel nimmt also nur auf die **letzten beiden Funktionswerte** Bezug. Zur Vereinfachung wird in den beiden folgenden Sätzen über Eindeutigkeit und Existenz der rekursiv definierten Funktion f kein Bezug auf Definitions- und Wertebereiche der Rekursionsregel g genommen. Der Fall $f(u) = g(f|u) = U$ für $f|u \notin D_g$ bei zu kleinem D_g wird damit stillschweigend in Kauf genommen.

11.4 Satz: Seien x und y zwei Ordinalzahlen mit $x \in y$ und $f : x \to A$ sowie $h : y \to A$ zwei Funktionen. Existiert eine gemeinsame Rekursionsregel mit $f(u) = g(f|u)$ für alle $u \in x$ und $h(u) = g(h|u)$ für alle $u \in y$, so stimmen g und h auf x überein.

Beweis: Sei $u \in x$ das kleinste Element mit $f(u) \neq h(u)$, dann stimmen f und h auf der **Menge** $u = [\emptyset; u[$ überein und daraus folgt $f(u) = g(f|u) = g(h|u) = h(u)$ im Widerspruch zur Annahme.

11.5 Satz über die transfinite Rekursion: Für jede Rekursionsregel g existiert eine eindeutig bestimmte Funktion f mit $f(x) = g(f|x)$ für jede Ordinalzahl x und $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$.

Beweis: Die Menge $f := \{(u; h(u)) : u \in D_h : h(v) = g(h|v) \, \forall v \in D_h : D_h \in \omega \vee D_h = \omega\}$ ist nach Satz 11.4 selbst eine Funktion mit $f(v) = g(f|v)$ für alle $v \in D_f$ und $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$. f ist auch eindeutig bestimmt, denn nach Definition von f ist jede weitere Funktion mit den gewünschten Eigenschaften schon in f enthalten. Im Fall $D_f = \omega$ ist der Satz schon bewiesen. Falls $D_f \in \omega$, sei $x \in \omega \setminus D_f$ und mit 9.1 folgt $f(x) = U$. Im Fall $f \notin D_g$ folgt aus dem gleichen Grund $U = g(f) = g(f|x) = f(x)$ und die Behauptung ist auch für diesen Fall bewiesen. Sei schließlich $f \in D_g$ und $h := f \cup \{(D_f; g(f))\}$. Die Menge D_f ist das kleinste Element von $\omega \setminus D_f$. Nach Satz 9.5 ist damit auch f eine Menge und ebenso $g(f)$. Damit folgt $h(v) = g(h|v)$ für alle $v \in D_h = D_f + 1$. Offensichtlich ist $h \subset f$ und daher $\{(D_f; g(f))\} \subset f$. Wegen $D_f \notin D_f$ ergibt dies einen Widerspruch, womit dieser letzte Fall ausgeschlossen ist.

11.6 Satz zur transfiniten Induktion: $\forall y \subset \omega : (\forall u \in \omega : (u \subset y \Rightarrow u \in y)) \Rightarrow y = \omega$.

Eine Aussage $\varphi(x)$ gilt für alle Ordinalzahlen $x \in y(\varphi) = \omega$, wenn man zeigen kann, dass für jede Ordinalzahl $u \in \omega$ aus der Gültigkeit der Aussage für jedes ihrer Elemente $(x \in u \subset y(\varphi))$ schon die Gültigkeit der Aussage für u selbst $(x = u \in y(\varphi))$ folgt.

Beweis: Sei u die kleinste Ordinalzahl aus $\omega \setminus y$. Dann gilt $\forall x \in u = [\emptyset; u[$ auch $x \in y$, denn andernfalls wäre $x \in \omega \setminus y$ mit $x \subsetneq u$ eine noch kleinere Ordinalzahl aus $\omega \setminus y$. Damit folgt aber $u \subset y$ und nach Voraussetzung $u \in y$ im Widerspruch zur Annahme.

Der bei der **finiten Induktion** (Satz 12.2) explizit geforderte **Induktionsstart** ist bei der transfiniten Induktion im Fall $y = \emptyset \in x$ enthalten, denn da es kein $u \in \emptyset$ gibt, folgt $\emptyset \in x$ schon aus der Voraussetzung.

12 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden als Klasse der **endlichen** Ordinalzahlen definiert. Satz 12.2 liefert die Axiome, die **Giuseppe Peano** im Jahr 1889 zur vollständigen Beschreibung der natürlichen Zahlen aufstellte. Zur Erweiterung der natülichen Zahlen auf die rationalen und reellen Zahlen benötigt man zusätzlich die **Mengeneigenschaft** der natürlichen Zahlen (Satz 12.3). Diese lässt sich erst mit Hilfe des **Unendlichkeitsaxioms VIII** beweisen:

VIII Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge x mit $\emptyset \in x$ und $\forall y \in x$ gilt $y \cup \{y\} \in x$.

Erst mit dem Unendlichkeitsaxiom werden alle bisherigen Aussagen mit Inhalt gefüllt. Insbesondere folgt aus dem Unendlichkeitsaxiom, dass es überhaupt Mengen gibt, dass $\emptyset$ eine Menge ist und damit $\emptyset \neq U$ gilt.

12.1 Definition: Eine Ordinalzahl heißt **endlich**, wenn **jede ihrer Teilmengen** ein **größtes Element** besitzt. Die endlichen Ordinalzahlen werden als Klasse $\mathbb{N}$ der **natürliche Zahlen** bezeichnet. Da die Eigenschaft des größten Elementes auch für Teilmengen gilt, ist jedes Element einer natürlichen Zahl wieder eine natürliche Zahl. Für das größte Element y einer natürlichen Zahl $x = [\emptyset; x[$ gilt einerseits $y \in x \Leftrightarrow y \subsetneq x$ bzw. $y + 1 = y \cup \{y\} \subset x$ und andererseits $x \subset y + 1$. Daraus folgt $y + 1 = x$ und $x - 1 := y$ ist der **Vorgänger** von x. Für eine **unendliche** Ordinalzahl $x = [\emptyset; x[$ hingegen gibt es eine Teilmenge $y \subset x$ mit $\forall u \in y \subset x \exists w \in y \subset x : u \in w$. Damit besitzt aber insbesondere x selbst kein größtes Element, d.h. $\forall u \in x \exists w \in x : u \in w$ und damit $x \subset \bigcup x$, also $x = \bigcup x$: **unendliche Ordinalzahlen besitzen einen Nachfolger, aber keinen Vorgänger**!

12.2 Satz: (Peanos Axiome der natürlichen Zahlen)

1. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$.
2. $0 \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in \mathbb{N} : x + 1 \neq 0$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.
4. **Finite Rekursion:** Für jede **Rekursionsregel** $g : A \to A$ mit **Startwert** $f_0 \in A$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = f_0$ und $f(x+1) = g(f(x)) \forall x \in \mathbb{N}$.
5. **Finite Induktion:** $0 \in x \subset \mathbb{N}$ (**Start**) $\wedge \forall y \in x : (y \in y \Rightarrow y + 1 \in x)$ (**Induktionsschritt**) $\Rightarrow x = \mathbb{N}$.

Beweis:

1. Die 2^x Teilmengen von $x \in \mathbb{N} \subset \omega$ werden zu 2^{x+1} Teilmengen von $x + 1 \in \omega$ ergänzt, indem man zu jeder Teilmenge $y \subset x$ die um das Element x erweiterte Teilmenge $y \cup \{x\}$ hinzufügt. Die neuen Teilmengen haben alle das maximale Element x und es folgt $x + 1 \in \mathbb{N}$.
2. $\emptyset \in \mathbb{N}$ ist offensichtlich und $x + 1 = x \cup \{x\} \neq \emptyset$, weil nach dem Unendlichkeitsaxiom $\{x\} \neq \emptyset$ für alle x.
3. Folgt aus 11.3, denn $\bigcup(x + 1) = x$ für alle $x \in \omega$.
4. Wende Satz 11.5 an mit der Rekursionsregel $g' : A \to A$ mit $g'(0) = f_0$ und $g'(f|x) = f(x - 1)$, wobei $x - 1$ das maximale Element von $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei. Man erhält die eindeutig bestimmte Funktion f: $\mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = g'(f|0) = g'(0) = f_0$ und $f(x) = g(f(x-1))$ für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Da x das maximale Element von $x + 1$ ist, folgt $f(x+1) = g(f(x))$.
5. Sei u das kleinste Element aus $\mathbb{N} \setminus x$. Nach Voraussetzung gilt $0 \in x$ und daher $u \geq 0 + 1 = 1$. Dann gilt $y \in x$ für den Vorgänger y mit $y + 1 = u$. Wieder nach Voraussetzung folgt dann aber $u = y + 1 \in x$ im Widerspruch zur Annahme.

12.3 Satz: $\mathbb{N} \in \omega$ ist die **kleinste unendliche Ordinalzahl**

Beweis: Nach 12.1 gilt $\mathbb{N} \subset \omega$. $\mathbb{N}$ wird also durch Inklusion linear geordnet und wieder nach 12.1 ist jedes Element einer natürlichen Zahl wieder eine natürliche Zahl. Nach 11.3 ist $\mathbb{N}$ also eine Ordinalzahl. Es bleibt nur zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist. Nach dem Unendlichkeitsaxiom VIII gibt es eine Menge x mit $0 \in x$ und $y \in x \Rightarrow y+1 \in x$. Nach 12.2.1 und 12.2.2 gilt aber auch $0 \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y+1 \in \mathbb{N}$. Also folgt $0 \in x \cap \mathbb{N}$ und $y \in x \cap \mathbb{N} \Rightarrow y+1 \in x \cap \mathbb{N}$. Mit finiter Induktion 12.2.5 folgt $x \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset x$. Nach 6.9 ist $\mathbb{N}$ also eine Menge, nach 12.2.1 unendlich und nach Definition 12.1 muss sie dann die kleinste unendliche Ordinalzahl sein

12.4 Satz über die Rechenoperationen für natürliche Zahlen: Für jedes $x \in \mathbb{N}$ existieren die eindeutig bestimmten Funktionen

1. **Addition von x:** $x+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x + 0 = x$ und $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.
2. **Multiplikation mit x:** $x\cdot : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \cdot 0 = 0$ und $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$.
3. **Potenzierung von x:** $x^{\square} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x^0 = 1$ und x^{y+1}=x$^y \cdot x$.

Da die obigen Funktionen für jedes $x \in \mathbb{N}$ **eindeutig bestimmt** sind, erhält man damit die bekannten **zweistelligen Operatoren** Summe: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{Summe}\,(x; y) := x + y$, Produkt: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{Produkt}\,(x; y) := x \cdot y$ und Potenz: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{Potenz}\,(x; y) := x^y$.

Beweis: Durch **finite Rekursion** 12.2.4 mit

1. $f(0) := x$ und $g\,(f(y)) := f(y) + 1$
2. $f(0) := 0$ und $g\,(f(y)) := f(y) + x$
3. $f(0) := 1$ und $g\,(f(y)) := f(y) \cdot x$.

12.5 Satz: (Rechenregeln für natürliche Zahlen) Für $x, y, z \in \mathbb{N}$ gelten

1. **Kommutativgesetze**: $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$
2. **Assoziativgesetze**: $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3. **Distributivgesetz**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
4. **Potenzgesetze**: $x^{y+z} = x^y \cdot y^z$, $(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$ und $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$
5. **Äquivalenzumformungen**: $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$ und $x < y \Leftrightarrow x + y < y + z$

Beweis: Durch wiederholte Anwendung der **finite Induktion** 12.2.5 auf alle auftretenden Variablen. Der Übersicht halber wird nur der erste Beweis angegeben:

Kommutativgesetz für die Addition: Durch eine **erste** finite Induktion über $x \in \mathbb{N}$ erhält man den **Induktionsstart** $x+0 = 0+x$ für alle $x \in \mathbb{N}$: Zunächst gilt nämlich $0+x = x$, denn $0+0 = 0$ und aus $0+x = x$ folgt $0+(x+1) = (0+x)+1 = x+1$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Durch eine **zweite** finite Induktion über $x \in \mathbb{N}$ ergibt sich $y+(x+1) = (y+1)+x$, denn $y+(0+1) = (y+0)+1 = y+1 = y+1+0$ und aus $y+(x+1) = (y+1)+x$ folgt $y+((x + 1) + 1) = (y + (x + 1))+1 = ((y + 1) + 1)+x = (y+1)+(x+1)$. Damit erhält man den **Induktionsschritt**, denn aus $x + y = y + x$ folgt $x + (y + 1) = (x + y) + 1 = (y + x) + 1 = y + (x + 1) = (y + 1) + x$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Durch eine **dritte** finite Induktion über $y \in \mathbb{N}$ erhält man die Behauptung.

13 Erweiterung der natürlichen Zahlen

Die Erweiterungen der natürlichen Zahlen auf die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind algebraisch bzw. bei den reellen Zahlen topologisch motiviert und werden hier nur kurz dargestellt.

13.1 Definitionen: Der geordnete Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen entsteht aus der **Äquivalenzrelation** $r := \{((x; y)\,; (x'; y') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) : x + y' = x' + y)\}$ als **Quotientenmenge** $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus r$. Eine ganze Zahl wird damit als **Differenz zweier natürlicher Zahlen** definiert. Für die Äquivalenzklassen $x - y := r(x; y) \in \mathbb{Z}$ definiert man

1. **Addition**: $(x - y) + (z - u) := (x + z) - (y + u)$
2. **Multiplikation**: $(x - y) \cdot (z - u) := (x \cdot z + y \cdot u) - (x \cdot u + y \cdot z)$
3. **Ordnung**: $(x - y) \leq (z - u) :\Leftrightarrow x + u \subset z + y$.

Mit Hilfe dieser Definitionen können die Rechenregeln 12.5 aus den natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen übertragen werden, wobei man sich bei den Potenzen jetzt noch auf **natürliche Exponenten** beschränkt und die Wohlordnung auf eine **lineare Ordnung** reduziert wird. Die natürlichen Zahlen selbst werden mit der Funktion $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $i(x) := x-0$ **isoton** und **isomorph** in die ganzen Zahlen abgebildet, denn mit $x \subset y \Leftrightarrow i(x) \leq i(y)$ wird die Ordnung erhalten und mit $i(x + y) = i(x) + i(y)$ bzw. $i(x \cdot y) = i(x) \cdot i(y)$ werden auch die Rechenoperationen übertragen.

13.2 Definitionen: Der geordnete Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen entsteht analog zu 13.1 aus der **Äquivalenzrelation** $s := \{((x;y);(x';y')) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*) : x\cdot y' = x'\cdot y)\}$ als **Quotientenmenge** $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)\setminus s$, wobei $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Eine rationale Zahl wird damit als **Quotient zweier ganzer Zahlen** definiert. Für die Äquivalenzklassen $\frac{x}{y} := s\,(x;y) \in \mathbb{Q}$ definiert man

1. **Addition**: $\frac{x}{y} + \frac{z}{u} := \frac{x\cdot u + z\cdot y}{y\cdot u}$
2. **Multiplikation**: $\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{u} := \frac{x\cdot z}{y\cdot u}$
3. **Ordnung**: $\frac{x}{y} < \frac{z}{u} :\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot u < z\cdot y, & \text{falls } y\cdot u > 0 \\ x\cdot u > z\cdot y, & \text{falls } y\cdot u < 0 \end{cases}$

Mit Hilfe dieser Definitionen können die Rechenregeln 13.1 aus den ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen übertragen werden, wobei man sich bei den Potenzen jetzt noch auf **ganze Exponenten** beschränkt. Die ganzen Zahlen selbst werden mit der Funktion $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mit $j(x) := \frac{x}{1}$ wieder **isoton** und **isomorph** in die rationalen Zahlen abgebildet. Sie sind **in sich dicht**, denn $\forall \frac{x}{y} < \frac{z}{u}$: $\frac{x}{y} < \frac{x\cdot u + z\cdot y}{2\cdot y\cdot u} < \frac{z}{u}$, da wegen $x\cdot u < y\cdot z$ ist auch $2\cdot x\cdot y\cdot u < x\cdot y\cdot u + z\cdot y\cdot y$ und $x\cdot u\cdot u + y\cdot z\cdot u < 2\cdot y\cdot z\cdot u$.

13.3 Definitionen: Der vollständig geordnete Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird nach **Richard Dedekind 1872** definiert als die Menge aller **offenen Schnitte** in $\mathbb{Q}$ gemäß Satz 10.4: $\mathbb{R} := \{\emptyset \neq x \subsetneq \mathbb{Q} : \forall s \in x \forall a \in \mathbb{Q} : a \leq s \Rightarrow a \in x\}$. $\mathbb{R}$ enthält also u.a. alle offenen Intervalle der Gestalt $]-\infty; x[$ mit rationalen Grenzen $x \in \mathbb{Q}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert man:

1. **Addition**: $x + y := \{a + b : a \in x \wedge b \in y\}$
2. **Multiplikation**: $x\cdot y := \left\{ a\cdot b : \begin{cases} a \in x \wedge b \in y\backslash]-\infty;0] & :]-\infty;0] \subset x \wedge]-\infty;0] \subset y \\ a \in x \wedge b \in \mathbb{R}\setminus y & : x \subset]-\infty;0] \wedge]-\infty;0] \subset y \\ a \in \mathbb{R}\backslash x \wedge b \in y & :]-\infty;0] \subset x \wedge y \subset]-\infty;0] \\ a \in \mathbb{R}\setminus x \wedge b \in]-\infty;0]\setminus y & : x \subset]-\infty;0] \wedge y \subset]-\infty;0] \end{cases} \right\}$
3. **Ordnung**: $x < y :\Leftrightarrow x \subsetneq y$.

Die langwierigen Fallunterscheidungen bei der Multiplikation erspart man sich, wenn man die reellen Zahlen nach **Georg Cantor 1872** als Grenzwerte von **Cauchy-Folgen** rationaler Zahlen definiert. Da diese Grenzwerte a priori nicht bekannt sind, muss man sich aber zunächst klar machen, unter welchen Bedingungen zwei Cauchy-Folgen einen gemeinsamen Grenzwert haben und wie man diese Cauchy-Folgen ordnet und verknüpft. Dieser Zugang ist ein Spezialfall der **(topologischen) Vervollständigung metrischer Räume** und wird daher in der **Topologie** näher dargestellt. Mit Hilfe der obigen Definitionen können die bekannten Rechenregeln 13.1 aus den rationalen Zahlen in die reellen Zahlen übertragen werden. Die rationalen Zahlen selbst werden mit der Funktion $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $k(x) :=]-\infty; x[$ wieder **isoton** und **isomorph** in die reellen Zahlen abgebildet. Die reellen Zahlen sind **vollständig geordnet** und das Bild $k\,[\mathbb{Q}]$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$.

13.4 Definitionen: Die **imaginäre Zahl** i mit $i^2 = -1$ wird seit **Rafael Bombelli 1569** verwendet, um die rationalen oder reellen Zahlen zu einem **algebraisch abgeschlossenen Körper** zu erweitern. Im Fall der reellen Zahlen erhält man den Körper $\mathbb{C}$ **der komplexen Zahlen.** In Anlehnung an die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen sowie die **Restklassenringe** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kann man $\mathbb{C}$ als **Quotientenring** $\mathbb{R}\,[x]\,/\,(x^2+1)$ des **Polynomringes** $\mathbb{R}\,[x]$ über die Äquivalenzrelation $(x^2+1) := \{(u;v) \in \mathbb{R}\,[x]\times\mathbb{R}\,[x] : \exists f \in \mathbb{R}\,[x] \text{ mit } u - v = f\cdot(x^2+1)\}$ betrachten. Die Elemente dieses Quotientenringes haben die Gestalt von Äquivalenzklassen $\overline{u} := \{u \in \mathbb{R}\,[x] : \exists f \in \mathbb{R}\,[x] : u + f\cdot(x^2+1)\}$. Wenn man das Polynom $u \in \mathbb{R}\,[x]$ durch x^2+1 teilt, bleibt nur ein linearer Rest der Gestalt $a + bx$ mit reellen Zahlen a und b. Die Elemente von $\mathbb{C}$ lassen sich also darstellen in der Form $a\cdot\overline{1} + b\cdot\overline{x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die zweite Komponente entpricht den **imaginären Zahlen**, denn wegen $x\cdot x = x^2 + 1 - 1$ folgt $\overline{x}\cdot\overline{x} = \overline{-1}$. Damit ergibt sich die übliche Darstellung in der Form$z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und der **imaginären Einheit** $i^2 = -1$. Jetzt erhält man die Multiplikationsregel $(a + ib)\cdot(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ direkt durch Anwendung des Distributivgesetzes und aus der Bedingung $(c + id)\cdot(a + ib) = 1$ die Inverse $(a + ib)^{-1} = (c + id) = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a - ib)$. Nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** sind die komplexen Zahlen **algebraisch abgeschlossen:** Jedes

Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle. Mittels **Polynomdivision** lässt sich ein Polynom vom Grad n daher in n **Linearfaktoren** zerlegen und besitzt damit sogar n Nullstellen.

Eine einfachere Konstruktion ergibt sich, wenn man $\mathbb{C}$ als **Untervektorraum** von **Matrizen** der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ betrachtet. Dann ergeben sich die **Multiplikationsregel** direkt aus der Matrizenmultiplikation und die **Inversen** berechnen sich aus $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bzw. $(a;b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Die wichtigsten Eigenschaften der komplexen Zahlen erschließen sich aber erst in der **komplexen Analysis**. Dem Gewinn vieler angenehmen Eigenschaften steht allerdings auch ein nicht unbedeutender Verlust gegenüber: die komplexen Zahlen sind **nicht mehr linear geordnet.**

14 Das Auswahlaxiom

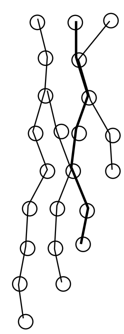
Das Auswahlaxiom ist unabhängig von den übrigen Axiomen und wird im Gegensatz zu diesen als direkte Voraussetzung wichtiger Sätze der Topologie, Algebra und Analysis benötigt. Aufgrund der Vielfalt der Anwendungen existieren verschiedene Formulierungen des Auswahlaxioms, deren Gleichwertigkeit nicht ohne weiteres offensichtlich ist. Die wichtigsten werden in diesesm Abschnitt dargestellt und ihre Gleichwertigkeit mit dem Auswahlaxiom bewiesen.

14.1 Definitionen: Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie sich bijektiv auf eine natürliche Zahl abbilden lässt. Eine Klasse x hat **finiten Charakter**, wenn sie **genau** die Elemente enthält, deren **endliche Teilmengen wieder Elemente** von x sind. Sie ist **induktiv geordnet,** wenn jede **Kette (=linear geordnete Teilmenge)** eine **obere Schranke** besitzt.

14.2 Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. **IX Auswahlaxiom**: Es gibt eine **Auswahlfunktion** c mit $c(x) \in x$ für jede Menge $x \neq \emptyset$.
2. **Maximalprinzip von Hausdorff:**
   Jede geordnete Menge $(x; \leq)$ besitzt eine **maximale Kette** $y \subset x$.
3. **Lemma von Tukey:**
   Jede Menge $x \neq \emptyset$ mit **finitem Charakter** besitzt ein bezüglich $\subset$ **maximales Element** $w \in x$.
4. **Lemma von Zorn:**
   Jede **induktiv** geordnete Menge $(x; \leq) \neq \emptyset$ besitzt ein bezüglich $\leq$ **maximales Element** $w \in x$.
5. **Wohlordnungssatz von Zermelo:** Jede Menge $x \neq \emptyset$ besitzt eine **Wohlordnung**.

Beweis:



$1 \Rightarrow 2$: Wir konstruieren mittels **transfiniter Rekursion** eine aufsteigende Folge von Ketten über der Indexmenge ω. Da jede Vereningung solcher Ketten wieder eine Kette bildet, wird diese Folge durch die Inklusion **induktiv geordnet** und man erhält die gesuchte maximale Kette als Spezialfall des Zornschen Lemmas. Wie man an der Abbildung rechts sieht, muss **eine** maximale Kette nicht **die** größte Kette sein! Sei dazu $L \subset 2^x$ die Familie der Ketten von x und für jede Funktion $h : \omega \to L$ sei $L_h \subset y$ die Familie der Ketten, die **jede** Kette $h(n)$ mit $n \in \omega$ als **echte** Teilmenge enthalten. Die Funktion $f : D_f \to L$ mit $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$ wird nun über transfinite Rekursion 11.10 mittels der Rekursionsregel $g(h) := c(L_h) \in L_h$ definiert, wobei c die nach Voraussetzung existierende Auswahlfunktion ist. Beachte, dass die Vereinigung $\bigcup h[D_h]$ der bisherigen Ketten ebenfalls linear geordnet, aber nicht notwendigerweise **echt** länger ist als jede Kette aus $h[D_h]$. Erst durch die Wahl einer **echt** längeren Kette $c(L_h) \in L_h$ wird die **strenge** Monotonie der Funktion f mit $f(u) = g(f|u) = c\left(L_{f|u}\right) \in L_{f|u}$ bezogen auf die Inklusion in ω und

L erreicht. Damit ist auch $f^{-1}: f[D_f] \to D_f$ eine Funktion und da $f[D_f] \subset L$ nach 6.9 eine Menge ist, gilt dies nach dem Ersetzungsaxiom V auch für $f^{-1}[f[D_f]] = D_f \in \omega$. Wegen $D_f \notin D_f$ folgt $U = f(D_f) = g(f) = c(L_f)$. Nach dem Auswahlaxiom gilt $L_f = \emptyset$: Es gibt also keine Kette in x, die jede Kette aus $f[D_f]$ als **echte** Teilmenge enthält. $y := \bigcup f[D_f] \subset x$ ist nach Definition von f eine Kette in x, die jede Kette von $f[D_f]$ enthält und damit die gesuchte maximale Kette.

$2 \Rightarrow 3$: Sei $x \neq \emptyset$ eine Menge mit finitem Charakter und $y \subset x$ eine in Bezug auf Inklusion maximale Kette in x. Sei nun $z \subset \bigcup y$ eine Menge von **endlich** vielen Elementen von Mengen aus y. Da die Elemente von y durch Inklusion linear geordnet sind, gehören alle Elemente dieser endlichen Menge zu einer Teilmenge $u \in y \subset x$. Für die endliche Menge z gilt also $z \subset u \in x$ und wegen des finiten Charakters von x folgt $z \in x$. Da dies für jede endliche Teilmenge von $\bigcup y$ gilt, folgt $\bigcup y \in x$. Sei nun v ein weiteres Element von x mit $\bigcup y \subset v \in x$. Da jedes Element eines Elementes von y in v liegt, ist jedes Element von y Teilmenge von v. Daher ist $y \cup \{v\}$ eine in Bezug auf Inklusion linear geordnete Teilmenge von x, die y als Teilmenge enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Maximaleigenschaft von y. Es kann also kein solches v geben und $w := \bigcup y$ ist ein maximales Element von x.

$3 \Rightarrow 4$: Sei x eine geordnete Menge und L die Menge der Ketten in x. Für eine solche Kette $y \in L$ gilt $y \subset x$ und damit ist auch jede endliche Teilmenge $z \subset y$ linear geordnet: $z \in L$. Umgekehrt ist eine Menge linear geordnet, wenn jeden endliche Teilmenge linear geordnet ist. Die Menge L hat also finiten Charakter und nach Voraussetzung ein maximales Element $u \subset x$. v ist eine Kette und besitzt nach Voraussetzung eine obere Schranke $v \in x$. Dann ist w das gesuchte maximale Element von x, denn für jedes $w \in x$ mit $v \leq w$ ist $u \cup \{v\}$ eine linear geordnete Teilmenge von x, für die wegen der Maximaleigenschaft von v gilt $u \cup \{v\} \subset u \Leftrightarrow v \in u \Leftrightarrow v \leq w \Rightarrow v = w$.

$4 \Rightarrow 5$: Sei x eine nicht leere Menge und W die Menge aller Wohlordnungen $\leq_y$ auf Teilmengen $y \subset x$. W ist nicht leer, denn für jedes $z \in x$ ist $(z;z)$ eine Wohlordnung auf der Teilmenge $\{z\} \subset x$. Auf W wird eine Ordnung $\preceq$ definiert durch $\leq_y \preceq \leq_z :\Leftrightarrow (\leq_y = \leq_z) \vee (\leq_y \subset \leq_z \wedge \exists a \in z : y = \{u \in x : u \leq_z a\})$. Für eine $\preceq$- linear geordnete Teilmenge $V \subset W$ ist $\leq_V := \bigcup V$ offensichtlich eine lineare Ordnung auf der Teilmenge $v = \bigcup\{y : \leq_y \in V\} \subset x$. Für jede Teilmenge $w \subset v$ gibt es ein $\leq_y \in V$ mit $w \cap y \neq \emptyset$ und ein $\leq_y$- kleinstes Element $a \in w \cap y$. Für jedes $b \in w$ mit $b \leq_V a \in y$ gilt nach der Definition von $\preceq$ auch $b \in y \Rightarrow b \in w \cap y \Rightarrow b = a$. a ist also $\leq_y$- kleinstes und damit auch $\leq_V$- kleinstes Element von $w \subset v$. Damit ist $\leq_V$ eine Wohlordnung auf v und offensichtlich eine $\preceq$- obere Schranke von V. Nach dem Lemma von Zorn hat W also ein $\preceq$ - maximales Element $\leq_0$ auf der Teilmenge $y_0 \subset x$. Falls ein $z \in x \setminus y_0$ existiert, ist durch $\leq := \leq_0 \cup \{(\mathrm{c};\mathrm{z}) : \mathrm{c} \in \mathrm{y}_0 \cup \{\mathrm{z}\}\}$ auf $\mathrm{y}_0 \cup \{\mathrm{z}\}$ eine Wohlordnung definiert mit $\leq_0 \preceq \leq$ im Widerspruch zur Maximalität von $\leq_0$. $\leq_0$ ist also auf ganz x definiert und damit die gesuchte Wohlordnung.

Bemerkung: Mit Hilfe von Satz 10.7 und Bildung von Äquivalenzklassen isotoner Mengen kann sogar die gesamte Ordnung $\preceq$ linear gemacht werden, aber dieser Schritt wird hier nicht benötigt!

$5 \Rightarrow 1$: Nach Voraussetzung existiert für jedes nicht leere $x \in U$ eine Wohlordnung und bezüglich dieser das eindeutig bestimmte kleinste Element $x_0 \in x$. Mit $c(x) := x_0$ erhält man die gesuchte Auswahlfunktion.

15 Kardinalzahlen

15.1 Satz: Jede Menge läßt sich bijektiv auf eine Ordinalzahl abbilden.

Beweis: Wie im Beweis von 14.1.2 konstruieren wir mittels transfiniter Rekursion 11.10 und des Auswahlaxioms IX eine Funktion $f : \omega \to x$, die für jede Ordinalzahl ein Element von x auswählt, welches von den vorangegangenen Ordinalzahlen noch nicht belegt wurde: Mit der Rekursionsregel $g(h) := c(x \setminus h[D_h])$ erhält man $f(u) = g(f|u)) = c(x \setminus f[u]) \in x \setminus f[u]$ für jede Ordinalzahl u und $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$. Wegen $D_f \notin D_f$ ist $U = f(D_f) = g(f) = c(x \setminus f[D_f])$. Nach dem Auswahlaxion IX folgt $x \setminus f[D_f] = \emptyset \Leftrightarrow x = f[D_f]$. f ist bijektiv, denn für zwei Ordinalzahlen $v \subsetneq u$ gilt nach 11.3 $v \in u \Rightarrow f(v) \in f[u]$ und $f(u) \in x \setminus f[u] \Rightarrow f(v) \neq f(u)$. Dann ist $f^{-1} : x \to \omega$

wieder eine Funktion und nach dem Ersetzungsaxion V ist $D_f = f^{-1}[x]$ eine Menge und insbesondere $D_f \in \omega$.

15.2 Definitionen: Kardinalzahlen dienen zum Vergleich der **Mächtigkeiten** von Klassen. Zwei Klassen x und y sind **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion $f : x \to y$ gibt. Die Gleichmächtigkeit ist nach Satz 15.1 eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse U aller Mengen und insbesondere auf der Klasse ω aller **Ordinalzahlen**. Das **kleinste** Element einer Äquivalenzklasse gleichmächtiger Ordinalzahlen heißt **Kardinalzahl**. Die Klasse $C \subset \omega$ der Kardinalzahlen wird durch Inklusion wieder **wohlgeordnet** und für jede Menge $x \in U$ existiert die eindeutig bestimmte gleichmächtige Kardinalzahl $|x| \in C$, die auch **Mächtigkeit** von x genannt wird. Für die **Zahlbereiche** aus Abschnitt 13 gilt z.B. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$, da sich alle drei Zahlbereiche bijektiv aufeinander abbilden lassen.

15.3 Satz: $x \subset y \Rightarrow |x| \subset |y|$.

Beweis: Für die Bijektion $f : y \to |y|$ ist das Bild $f[x] \subset |y| \in \omega$ wohlgeordnet und nach Satz 10.7 ist $f[x]$ isoton zu $|y|$ oder einem Schnitt von $|y|$ oder umgekehrt. Da $|y|$ die kleinste zu y gleichmächtige Ordinalzahl ist und jeder Schnitt von $|y|$ eine kleinere Ordinalzahl als $|y|$ darstellt, ist der Satz in den ersten beiden Fällen bewiesen. Im dritten Fall ist $|y|$ isoton und damit gleichmächtig zu einem Schnitt von $f[x] \subset |y|$. Dieser Schnitt wäre eine Ordinalzahl, die echt kleiner ist als $|y|$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $|y|$. Damit ist der dritte Fall ausgeschlossen.

15.4 Satz von Schroeder-Bernstein: Zwei Mengen x und y sind gleichmächtig, wenn x gleichmächtig ist zu einer Teilmenge $v \subset y$ und y gleichmächtig zu einer Teilmenge $u \subset x$.

Beweis: Mit Satz 15.3 gilt $|x| = |v| \subset |y| = |u| \subset |x|$.

15.5 Satz: Ist $f : x \to y$ injektiv, so folgt $|x| \subset |y|$.

Beweis: Da $f : x \to f[x] \subset y$ bijektiv ist, folgt aus Satz 15.3 $|x| = |f[x]| \subset |y|$.

15.6. Satz: Ist die Funktion f eine Menge, so gilt $|f[D_f]| \subset |D_f|$.

Beweis: Mit dem Auswahlaxiom IX definiert man eine Funktion $g : f[D_f] \to D_f$ mit $g(y) := c(\{x : f(x) = y\})$, die zu jedem Bild $y \in f[D_f]$ eines der möglichen Urbilder x mit $y = f(x)$ auswählt. Da g injektiv ist, ist $f[D_f]$ gleichmächtig zu einer Teilmenge von D_f und mit Satz 15.3 folgt die Behauptung.

15.7 Satz von Cantor: Für jede Menge x gilt $|x| \subsetneq |2^x|$.

Beweis: Aus der Injektion $f : x \to 2^x$ mit $f(u) := \{u\}$ folgt mit Satz 15.3 $|x| \subset |2^x|$. Im Fall $|x| = |2^x|$ gäbe es eine Bijektion $g : x \to 2^x$ und ein $u \in x$ mit $g(u) := \{v \in x : v \notin g(v)\} \in 2^x$, welche auf den Widerspruch $u \in g(u) \Leftrightarrow u \notin g(u)$ führt.

Der folgende Satz beschreibt die Auflösung der **Cantor-Antinomie 3.3** im NBG-System.

15.8 Satz: C ist keine Menge.

Beweis: Angenommen, C ist eine Menge, so gilt dies nach dem großen Vereinigungsaxiom VI auch für $\bigcup C$ und nach dem Potenzmengenaxiom III für $2^{\bigcup C}$. Nach Satz 15.1 folgt $\left|2^{\bigcup C}\right| \in C \Rightarrow \left|2^{\bigcup C}\right| \subset \bigcup C$ und nach 15.3 weiter $\left|2^{\bigcup C}\right| \subset |\bigcup C|$ im Widerspruch zu Satz 15.7.

15.9 Satz: Für $x, y \in \omega$ gilt $|x + 1| = |y + 1| \Rightarrow |x| = |y|$.

Beweis: Aus der Bijektion $f : x + 1 \to y + 1$ erhält man mit $g = f \setminus \{(x; f(x)); (f^{-1}(y); y)\} \cup \{(f^{-1}(y); f(x))\}$ eine Bijektion $g : x \to y$.

16 Endliche Mengen

16.1 Satz: $\mathbb{N} \subset C$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, die keine Kardinalzahl und damit gleichmächtig zu einer kleineren natürlichen Zahl y ist. Nach Satz 15.9 ist dann aber auch ihr Vorgänger $x - 1$ gleichmächtig zu $y - 1$ im Widerspruch zur Annahme. Es kann also keine solche natürliche Zahl geben, d.h. jede natürliche Zahl ist eine Kardinalzahl.

16.2 Satz: $\mathbb{N} \in C$.

Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist keine Kardinalzahl und damit gleichmächtig zu einer kleineren Ordinalzahl $x \in \mathbb{N}$. Wegen $x \subset x+1 \subset \mathbb{N}$ und nach Satz 15.3 folgt $|x| \subset |x+1| \subset |\mathbb{N}| \Rightarrow |x| = |x+1|$ und $x+1$ wäre kein Kardinalzahl im Widerspruch zu Satz 16.1.

16.3 Definition: Eine Menge x heißt **endlich**, wenn $|x| \in \mathbb{N}$ und andernfalls **unendlich.**

16.4 Satz: Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie eine Ordnung besitzt, für die jede Teilmenge ein größtes und ein kleinstes Element hat. Jede **Teilmenge** einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis:

$\Rightarrow$: Ist die Menge x endlich, so gibt es eine Bijektion $f : x \to |x| \in \mathbb{N}$ und mit $u \leq v \Leftrightarrow f(u) \subset f(v)$ für $u, v \in x$ ist eine Ordnung mit den gewünschten Eigenschaften definiert.

$\Leftarrow$: Besitzt die Menge x eine Wohlordnung, so gibt es nach Satz 10.7 eine streng monotone Funktion $f : x \to \omega$. Da alle Teilmengen von x ein größtes Element besitzen und f streng monoton, gilt dies auch für $f[x]$ und gemäß 12.1 folgt $f[x] \in \mathbb{N}$.

16.5. Satz: Für zwei endliche Mengen x und y ist auch die Vereinigung $x \cup y$ endlich.

Beweis: Nach Satz 16.4 besitzen x und y Ordnungen $\leq$ und $\preceq$, bezüglich derer jede Teilmenge ein größtes und ein kleinstes Element hat. Die gewünschte Ordnung auf $x \cup y$ erhält man dann folgendermaßen:

$$u \leq v \Leftrightarrow \begin{cases} \quad u, v \in x \wedge u \leq v \\ \vee\ u, v \in y \wedge u \preceq v \\ \vee\ u \in x \wedge v \in y \end{cases}.$$

16.6 Satz: Wenn x und jedes Element von x endlich sind, ist auch $\bigcup x$ endlich.

Beweis: Mit **finiter Induktion** 12.2.5: **Induktionsstart**: Der Satz gilt offensichtlich für $x = \emptyset$. **Induktionsschritt**: Der Satz gelte für alle x mit $|x| = u \in \mathbb{N}$ und es sei y gegeben mit der Bijektion $f : u \cup \{u\} \to y$. Wegen $|f[u]| = u$, ist $f[u]$ endlich und da außerdem jedes Element von $f[u]$ endlich, ist nach Induktionsvoraussetzung auch $\bigcup f[u]$ endlich. Nach Satz 16.5 und wegen $\bigcup \{f(u)\} = f[u]$ ist dann auch $y = \bigcup f[u \cup \{u\}] = \bigcup (f[u] \cup \{f(u)\}) = \bigcup f[u] \cup \bigcup \{f(u)\} = \bigcup f[u] \cup f[u]$ endlich.

16.7 Satz: Für zwei endliche Mengen x und y ist auch ihr Produkt $x \times y$ endlich.

Beweis: Mit 16.6, denn $x \times y = \bigcup \{\{u\} \times y :\ u \in x\}$ und mit y sind auch die Mengen $\{u\} \times y$ endlich.

16.8 Satz: Für eine endliche Menge x ist auch ihre Potenzmenge 2^x endlich.

Beweis: Mit **finiter Induktion** 12.2.5: **Induktionsstart:** Der Satz gilt offensichtlich für $\emptyset = 2^{\emptyset}$. **Induktionsschritt:** Der Satz gelte für alle x mit $|x| = u \in \mathbb{N}$ und es sei y gegeben mit der Bijektion $f : u \cup \{u\} \to y$. Dann ist $2^y = 2^{f[u] \cup f(u)} = 2^{f[u]} \cup \left\{z \cup f(u) : z \in 2^{f[u]}\right\}$ nach der Induktionsvoraussetzung mit $x = f[u]$ und Satz 16.5 wieder endlich.

16.9 Satz: Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie keine gleichmächtige echte Teilmenge besitzt.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei x endlich und $z \in x \setminus y$ für eine echte Teilmenge $y \subsetneq x$ mit der Bijektion $f : |y| \to y$. Dann ist $g : |y| \cup \{|y|\} \to x$ mit $g = f \cup \{(y; z)\}$ injektiv und aus Satz 15.5 folgt $||y| \cup \{|y|\}| = |y| + 1 \subset |x|$. y kann also nicht gleichmächtig zu x sein.

$\Leftarrow$: Sei x unendlich mit $\mathbb{N} \subset |x|$ und der Bijektion $f : |x| \to x$. Wegen Satz 12.2.1 ist $g : |x| \to |x| \setminus \{\emptyset\}$ mit $g(u) := \begin{cases} u+1 & \text{für } u \in \mathbb{N} \\ u & \text{für } u \in \mid x \mid \setminus \mathbb{N} \end{cases}$ ebenfalls bijektiv. Mit $f \circ g \circ f^{-1} : x \to x \setminus f(\emptyset)$ erhält man dann eine Bijektion von x auf eine echte Teilmenge von x.

17 Unendliche Mengen

17.1 Satz: Jede unendliche Ordinalzahl ist gleichmächtig zu ihren Nachfolger.

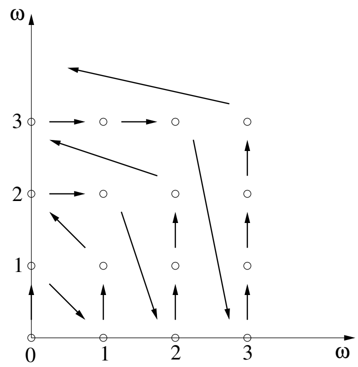
Beweis: Für $x \in \omega \setminus \mathbb{N}$ ist $f : x+1 \to x$ mit $f(u) := \begin{cases} u+1 & \text{für } u \in \mathbb{N} \\ u & \text{für } u \in x \setminus \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{für } u = x \end{cases}$ wegen 12.2.1 und 3 bijektiv.

Bemerkung: Für unendliche Ordinalzahlen x gilt damit sogar $|(x+1) \times (x+1)| = |x \times x|$, denn mit der oben definierten Bijektion$f : x+1 \to x$ ist $g : (x+1) \times (x+1) \to x \times x$ mit $g\left((u;v)\right) := \left((f(u); f(v)\right)$ ebenfalls bijektiv.

17.2 Satz und Definition:

Mit $(u;v) \leq (x;y) :\Leftrightarrow \begin{cases} \quad u \cup v \subsetneq x \cup y \\ \vee\ u \cup v = x \cup y \wedge u \subsetneq x \\ \vee\ u \cup v = x \cup y \wedge u = x \wedge v \subset y \end{cases}$ wird eine Wohlordnung auf $\omega \times \omega$ erklärt.

Beweis: (siehe Abbildung rechts) Da die Ordinalzahlen durch Inklusion linear geordnet werden, ist die Vereinigung $x \cup y$ gleich der größeren der beiden Ordinalzahlen x und y. Reflexivität, Transitivität und Asymmetrie folgen direkt aus der Definition. Ebenfalls aus der Definition sowie aus der linearen Ordnung der Ordinalzahlen durch Inklusion folgt, dass es sich wieder um eine lineare Ordnung handelt. Das kleinste Element einer Teilmenge von Paaren von Ordinalzahlen findet man, indem man entsprechend der Definition zunächst die Paare sucht, die in der ersten Koordinate die kleinste Ordinalzahl aufweisen und unter diesen dann in der zweiten Koordinate nach der kleinsten Ordinalzahl sucht. Es handelt sich also um eine Wohlordnung.



Bemerkung: Satz 17.2 ist eine Erweiterung des **Cantorschen Diagonalverfahrens**, mit dem sich Satz 17.4 für $x = \mathbb{N}$ bzw. Satz 17.8 elementar beweisen lassen.

17.3 Satz: $(u;v) \leq (x;y) \Rightarrow (u;v) \in ((x \cup y)+1) \times ((x \cup y)+1)$.

Beweis: $(u;v) \leq (x;y) \Rightarrow u \cup v \subset x \cup y \Rightarrow u, v \subset x \cup y \Rightarrow u, v \in (x \cup y)+1$.

17.4 Satz von Hessenberg: Für alle unendlichen Mengen x gilt $|x \times x| = |x|$.

Beweis: Wir wenden das Prinzip der **transfiniten Induktion** nur auf die Teilmenge der unendlichen Kardinalzahlen $C \setminus \mathbb{N} \subset \omega$ an und können Satz 11.10 daher nicht direkt übernehmen, wohl aber das **Beweisprinzip**. Nach den Sätzen 9.4, 10.7 und 17.2 gibt es für jede Kardinalzahl x eine streng monotone Funktion $f : x \times x \to y$, wobei $y \subset \omega$ ein Schnitt in der Menge der Ordinalzahlen ist. Wir zeigen, dass für jedes $(u;v) \in x \times x$ gilt $f\left((u;v)\right) \in x$ Wegen der Injektivität von f folgt nach Satz 15.5 daraus $x \times x \subset x$. Sei zunächst $x = \mathbb{N} \in C \setminus \mathbb{N}$. Für endliche $u, v \in x$ ist nach den Sätzen 16.4, 16.7 und 17.3 auch $[(\emptyset;\emptyset)\,;(u;v)[\, \subset ((x \cup y)+1) \times ((x \cup y)+1)$ endlich. Da f streng monoton und y ein Schnitt in ω ist, ist auch $f\left((u;v)\right) = [\emptyset; f\left((u;v)\right)[= [f\left((\emptyset;\emptyset)\right); f\left((u;v)\right)[= f\,[[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[]$ als bijektives Bild einer endlichen Menge endlich: $f\left((u;v)\right) \in x$. Sei nun $x \in C \setminus \mathbb{N}$ die kleinste Kardinalzahl, für die es ein $(u;v) \in x \times x$ gibt mit $f\left((u;v)\right) \notin x$. Für endliche Koordinaten u und v wurde oben schon gezeigt, dass $f\left((u;v)\right) \in x$ gelten muss. Sei also mindestens eine der Koordinaten unendlich mit $u \cup v \in \omega \setminus \mathbb{N}$. Nach Satz 17.1 und wegen $u \cup v \in x$ gilt dann $|(u \cup v)+1| = |u \cup v| \subset x$ und nach Annahme muss dann $|(u \cup v) \times (u \cup v)| = |u \cup v|$ sein. Mit der Bemerkung zu Satz 17.1 und 17.3 erhält man wie oben $|f((u;v))| = |f[[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[]| = |[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[| \subset |((x \cup y)+1) \times ((x \cup y)+1)| = |(u \cup v) \times (u \cup v)| = |u \cup v| \subset |x|$ und da sowohl $f((u;v))$ als auch x Ordinalzahlen sind, folgt $f((u;v)) \in x$ im Widerspruch zur Induktionsannahme. Für alle unendlichen Kardinalzahlen x gilt also$|x \times x| = |x|$. Für eine beliebige unendliche Menge x sei $f : x \to |x| \in C \setminus \mathbb{N}$ bijektiv. Dann gilt dies auch für $g : x \times x \to |x| \times |x|$ mit $g((u;v)) := ((f(u);f(v))$ und es folgt $|x \times x| = ||x| \times |x|| = ||x|| = |x|$.

17.5 Satz: Ist eine der beiden Mengen x und y unendlich, so gilt $|x \times y| = |x \cup y|$.

Beweis: folgt direkt aus Satz 17.4.

17.6 Satz: Haben alle Elemente einer unendlichen Menge x die gleiche Mächtigkeit wie x, so gilt $|\bigcup x| = |x|$. Insbesondere ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

Beweis: Nach dem Auswahlaxiom IX wählen wir für jedes $y \in x$ ein f_y aus der Menge der Bijektionen $f : y \to |x|$. Außerdem sei $g : x \to |x|$ die entsprechende Bijektion für x selbst. Für $z \in \bigcup x$ sei $u \in \omega$ die kleinste Ordinalzahl mit $z \in g^{-1}(u)$. Durch $h(z) := \left(u; f_{g^{-1}(u)}(z)\right)$ ist dann eine Bijektion $h : \bigcup x \to |x| \times |x|$ definiert und die Behauptung folgt aus Satz 17.5.

17.7 Satz: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Beweis: Nach Satz 15.3 gilt zunächst $|\mathbb{N}| \subset |\mathbb{Z}|$. Nach Satz 12.4.1 ist die Addition einer festgelegten Zahl eine streng monotone und daher bijektive Funktion. Für eine ganze Zahl $x - y \in \mathbb{Z}$ mit $x \geq y$ gibt es daher eine eindeutig bestimmte Zahl z mit $x = y + z$ und wir definieren in diesem Fall $f(x-y) := (z;0)$. Im Fall $x \leq y$ gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl z mit $y = x + z$ und es sei dann$f(x-y) := (0;z)$. Dann ist $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Injektion und nach den Sätzen 15.5 und 17.4 folgt $|\mathbb{Z}| \subset |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ und damit $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

17.8 Satz: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Beweis: Nach Satz 15.3 gilt zunächst $|\mathbb{N}| \subset |\mathbb{Q}|$. Nach Satz 13.1.2 gilt für ganze Zahlen $x' \in \mathbb{Z}$ und $y' \in \mathbb{Z}^*$ die Beziehung $x' \cdot (-y') = (-x') \cdot y' \Leftrightarrow \frac{-x'}{-y'} = \frac{x'}{y'}$. In der Äquivalenzklasse einer rationale Zahl $\frac{x'}{y'} \in \mathbb{Q}$ gibt es daher immer Vertreter mit positiven Nenner und unter diesen wählen wir alle Vertreter mit dem kleinsten positiven Nenner $x \in \mathbb{N}$ aus. Da die Multiplikation mit einer festgelegten natürlichen Zahl x nach 13.1.2 eine streng monotone und damit bijektive Funktion ist, ist der Nenner y für den gewählten kleinsten natürlichen Zähler x dann ebenfalls eindeutig festgelegt. Dann ist $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(f\left(\frac{x'}{y'}\right) := (x;y)$ eine Injektion und nach den Sätzen 15.5 und 17.4 folgt $|\mathbb{Q}| \subset |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ und damit $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

17.9 Satz: $|\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$. Die reellen Zahlen sind ebenso wie die Menge alle 0-1-Folgen nicht abzählbar.

Beweis: Nach Definition 13.3 gilt $\mathbb{R} \subset 2^{\mathbb{Q}}$ und nach den Sätzen 15.3 und 17.8 folgt $|\mathbb{R}| \subset \left|2^{\mathbb{Q}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$. Umgekehrt ist $g : 2^{\mathbb{N}} \to [0;1] \subset \mathbb{R}$ mit $g(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot 2^{-n-1}$ bijektiv und wieder mit Satz 15.3 folgt $\left|2^{\mathbb{N}}\right| \subset |\mathbb{R}|$. Für jedes $h : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$mit $h(k) = f_k$, existiert die Folge $i(n) := 1 - f_n(n)$ mit $i \in 2^{\mathbb{N}} \setminus h[\mathbb{N}]$, d.h., kein mögliches h ist surjektiv.

17.10 Satz und Defintion: Es gibt eine streng monotone Funktion $\aleph : \omega \to C \setminus \mathbb{N}$.

Beweis: folgt direkt aus Satz 10.7 und der Tatsache, dass einerseits jeder Schnitt in ω und $C \setminus \mathbb{N}$ eine Menge ist und andererseits weder ω noch $C \setminus \mathbb{N}$ selbst Mengen sind.

17.11 Definitionen: Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist $\aleph_0 := \aleph(\emptyset) = \mathbb{N}$. Mengen mit der Mächtigkeit $\mathbb{N}$ heißen **abzählbar unendlich**. Die nächste Kardinalzahl $\aleph_1$ ist die kleinste **überabzählbare** Ordinalzahl. Aus $\mathbb{N} \in \left|2^{\mathbb{N}}\right|$ folgt $\aleph_1 \subset \left|2^{\mathbb{N}}\right|$. Die **Kontinuumshypothese** besagt, dass $\aleph_1 = \left|2^{\mathbb{N}}\right||$. Sie ist ebenso wie das Auswahlaxiom unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre.

References

[1] Bernays, Paul, Axiomatic set theory, Dover 1968

[2] Ebbinghaus, Heinz-Dieter: Einführung in die Mengenlehre, 4. Auflage Spektrum 2003

[3] Fischer, Gerd und Sacher, Reinhard: Einführung in die Algebra, Teubner 1983

[4] Hewitt, Edwin und Stromberg, Karl: Real and abstract Analysis, Springer 1965

[5] Kelley, John: General topology, Springer 1955

[6] Morse, Anthony: A theory of sets, academic press 1965

[7] Suppes, Patrick: Axiomatic set theory, Dover 1972

[8] Vorwerg, Arne: Topologie, http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/Topologie.pdf