1.2. Kinematik

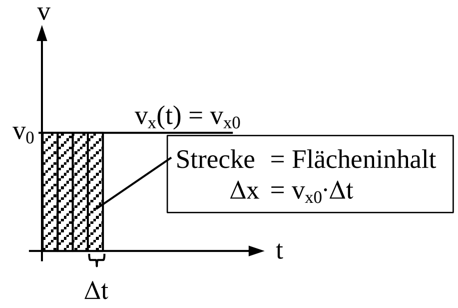
1.2.1. Die geradlinig gleichförmige Bewegung

Ein Körper bewegt sich geradlinig und gleichförmig entlang der x-Achse,

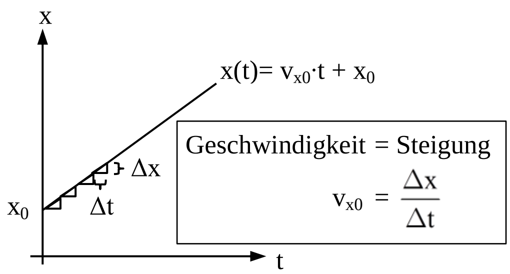
wenn seine **Geschwindigkeit (velocity)**

$$\boxed{v_{x0} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeitabschnitt}} = \frac{\text{Ortsänderung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

konstant bleibt.



Geschwindigkeiten werden in der **SI-Einheit** $[v] = \frac{m}{s}$ oder auch in $\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1}{3,6}\,\frac{m}{s}$ angegeben.



Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet $v_x(t) = v_{x0}$ und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine waagrechte Gerade.

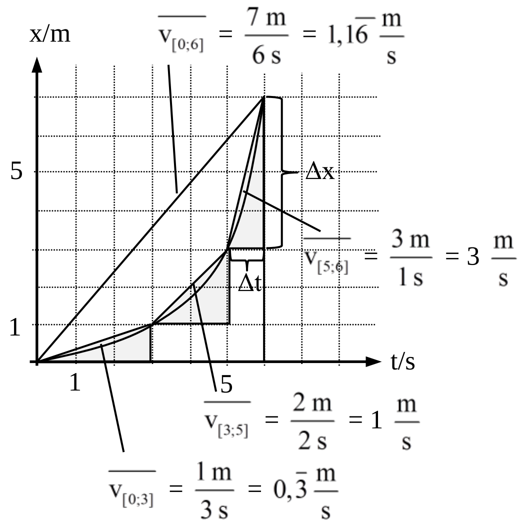
Die zurückgelegte **Strecke** $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ ist dann **proportional** zum benötigten **Zeitabschnitt** $\Delta t = t_2 - t_1$.
Man kann sie als **Flächeninhalt** $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$ im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.

Umgekehrt kann man die Geschwindigkeit als **Steigung** $v_{x0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ aus dem Ort-Zeit-Diagramm ablesen.

Mit $t_1 = 0$ und dem **Startort** $x_0 = x(0)$ erhält man die **Ort-Zeit-Gleichung** $x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0$ und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit **Startwert** x_0 und **Steigung** v_{x0}.

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 1 - 4

1.2.2. Mittlere und momentane Geschwindigkeit

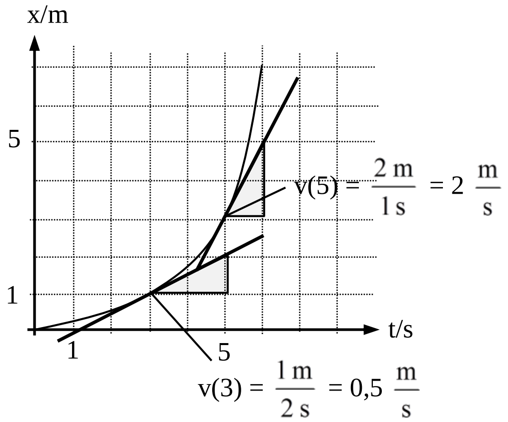


Bewegt sich ein Körper mit **veränderlicher Geschwindigkeit**, so ist die **mittlere Geschwindigkeit im Zeitabschnitt [t_1; t_2]** gleich der Steigung der **Sekanten** durch die Punkte $(t_1 \mid x(t_1))$ und $(t_2 \mid x(t_2))$ im Ort-Zeit-Diagramm:

$$\boxed{\overline{v_{[t_1;t_2]}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Möchte man die **momentane Geschwindigkeit in einem Zeitpunkt** t bestimmen, so muss man den Abstand Δt der beiden Punkte immer weiter verringern, bis sie schließlich aufeinander liegen. Anstelle des Buchstaben Δ verwendet man für unmessbar kleine Differenzen ein d und schreibt

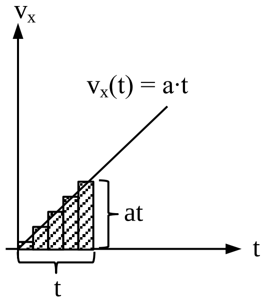
$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$



Solche unmessbar kleinen Differenzen heißen **Differentiale** und sind die Grundlage der **Differentialrechnung**. Graphisch erhält man die momentane Geschwindigkeit aus dem Ort-Zeit-Diagramm als Steigung der **Tangente**.

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 5

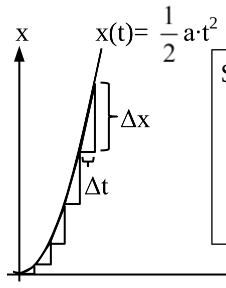
1.2.3. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung



Ein Körper bewegt sich gleichmäßig beschleunigt entlang der x-Achse, wenn seine **Beschleunigung (acceleration)** $\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}}$ konstant bleibt.

Die **SI-Einheit** der Beschleunigung ist $[a] = \frac{m}{s^2}$.

Die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** lautet $v_x(t) = a \cdot t$ und das **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm** zeigt eine Gerade mit der **Steigung** a.



Strecke = Dreiecksfläche

$$x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2} at^2$$

Die **insgesamt** zurückgelegte **Strecke** kann man als **Dreiecksfläche** $x = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ablesen.

Man erhält die **Ort-Zeit-Gleichung** $\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2}$ und das **Ort-Zeit-Diagramm** zeigt eine **Parabel**.

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 6

1.2.4. Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme zusammengesetzter Bewegungen

Beispiel: Das Einparken eines Autos lässt sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm verfolgen:

$0 \leq t \leq 4$ s: Konstante Geschwindigkeit vorwärts:

$$v = 5 \frac{m}{s}$$

$4 \leq t \leq 7$ s: Gleichmäßige Verzögerung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-5 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = -1{,}\overline{6} \frac{m}{s^2}$$

$7 \leq t \leq 9$ s: Auto steht

$$v = 0$$

$9 \leq t \leq 11$ s: Gleichmäßige Beschleunigung rückwärts:

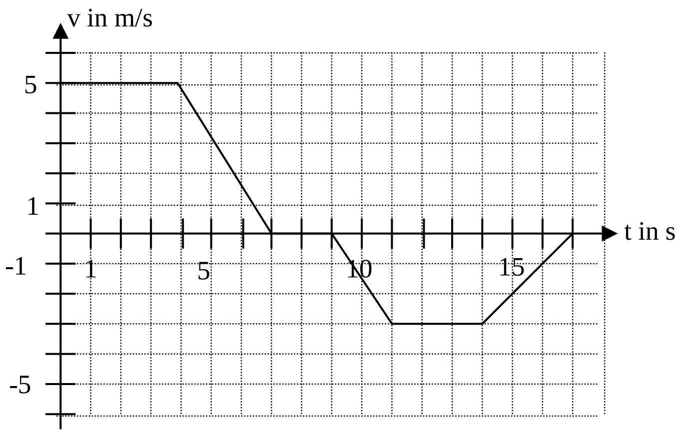
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = -1{,}5 \frac{m}{s^2}$$

$11 \leq t \leq 14$ s: Konstante Geschwindigkeit rückwärts:

$$v = -3 \frac{m}{s}$$

$14 \leq t \leq 17$ s: Gleichmäßige Verzögerung

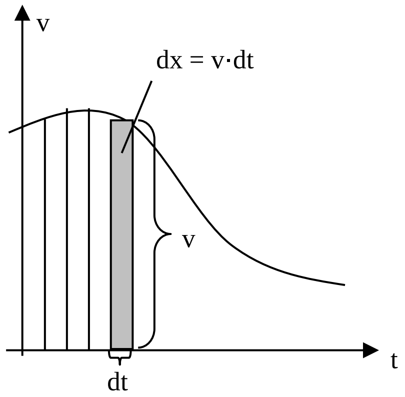
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = 1 \frac{m}{s^2}$$



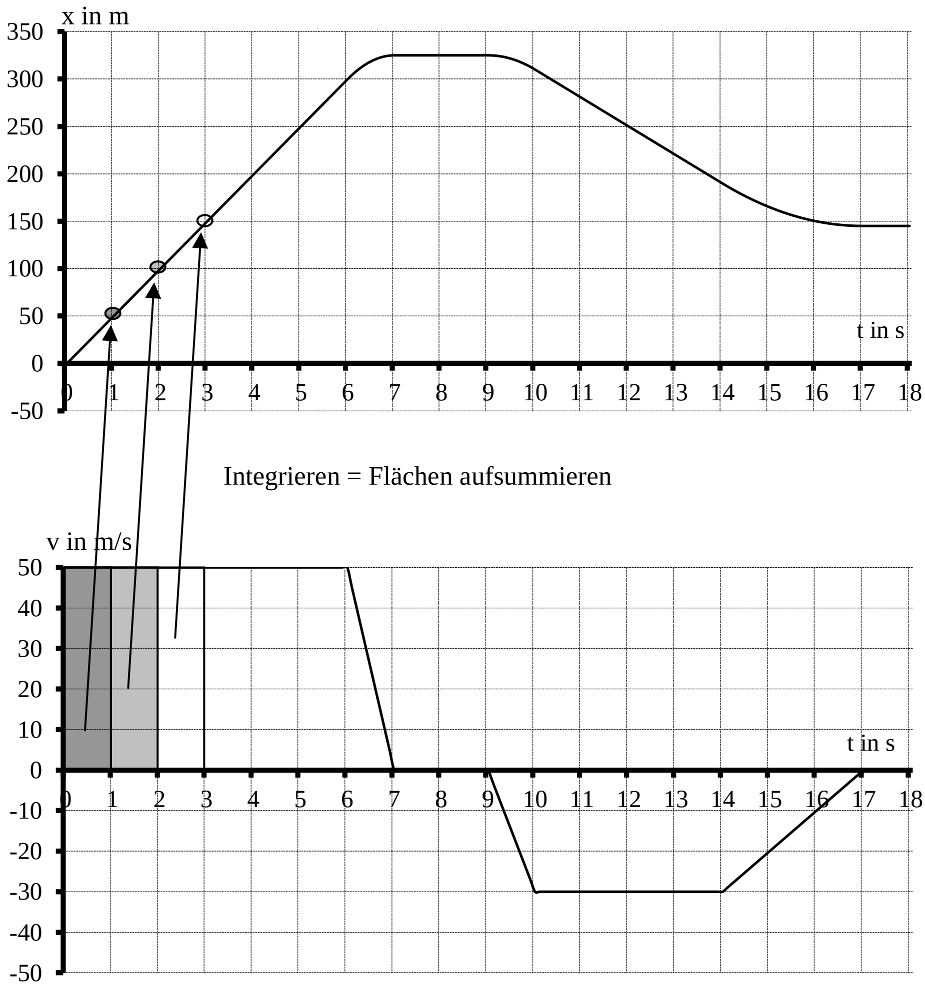
Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 7

1.2.5. Bestimmung des zurückgelegten Weges durch graphische Integration

Den zurückgelegten Weg erhält man durch **aufsummieren** (**integrieren**) der kleinen Ortsänderungen $dx = v \cdot dt$. Als Symbol für diese **Summe** dient häufig das **Integralzeichen S**: $x = \int dx = \int v \cdot dt$. Im v-t-Diagramm erscheinen die Ortsänderungen $dx = v \cdot dt$ als schmale **Rechtecke**, deren **Flächeninhalt** man z.B. durch **Abzählen** der Rasterkästchen bestimmt.



Beispiel:

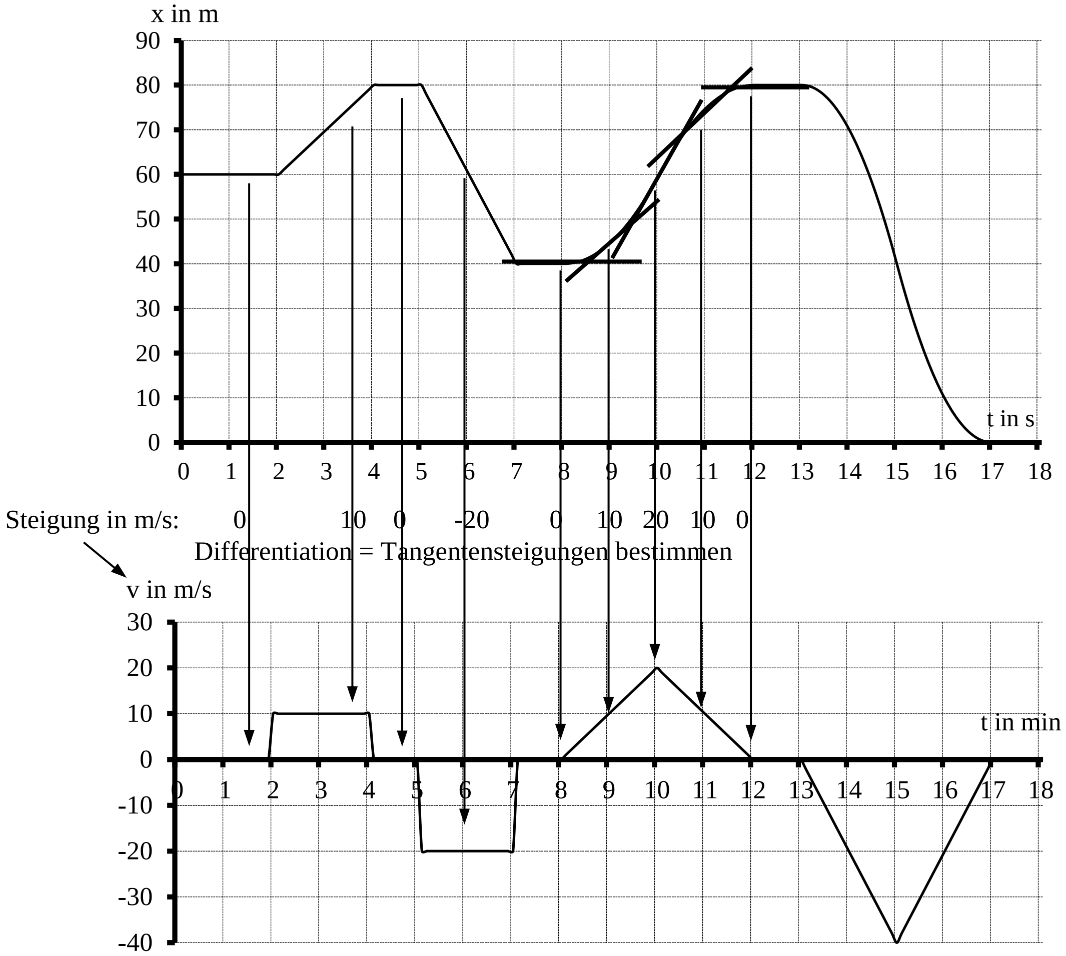


Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 8 und 9

1.2.6. Bestimmung der Geschwindigkeiten durch graphische Differentiation

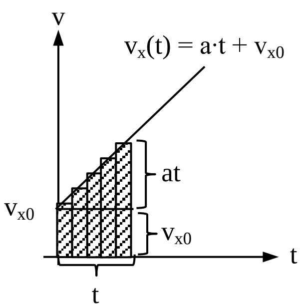
Um umgekehrt aus dem x-t-Diagramm das v-t-Diagramm **abzuleiten**, muss man die **Tangentensteigungen** $v = \frac{dx}{dt}$ am x-t-Diagramm bestimmen. Weil dabei das Verhältnis der Differentiale von Ort und Zeit jeweils zeichnerisch ermittelt wird, spricht man auch von **graphischer Differentiation**.

Beispiel:



Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 10 und 11

1.2.7. Gleichungen für zusammengesetzte Bewegungen



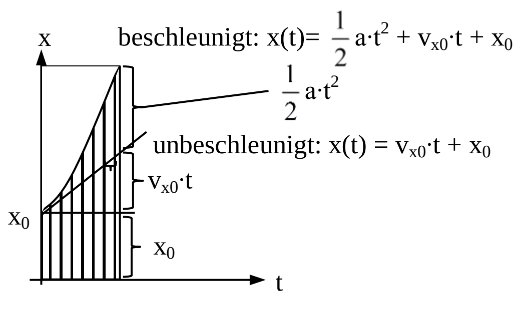
Mit **Startort** x_0, **Startgeschwindigkeit** v_{x0} und **Beschleunigung** a erhält man

die **Ort-Zeit-Gleichung** $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a\cdot t^2 + v_{x0}\cdot t + x_0.}$ und

die **Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung** $\boxed{v_x(t) = a\cdot t + v_{x0}.}$

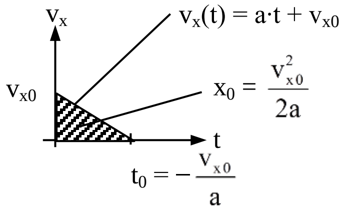
Vorzeichenbedeutungen:

Startort	$x_0 > 0$: versetzt in positive x-Richtung
	$x_0 < 0$: versetzt in negative x-Richtung
Startgeschwindigkeit	$v_0 > 0$: in positive x-Richtung
	$v_0 < 0$: in negative x-Richtung
Beschleunigung	$a > 0$: in positive x-Richtung
	$a < 0$: in negative x-Richtung = **Verzögerung**



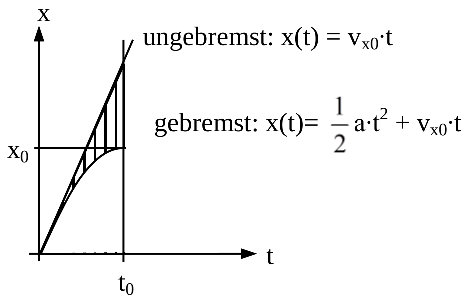
Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 12 und 13

1.2.8. Der Bremsvorgang



Ein Fahrzeug mit der **Startgeschwindigkeit** $v_{x0} > 0$ in positive x-Richtung **verzögert** (bremst) mit $a < 0$, bis es zum Stehen kommt.

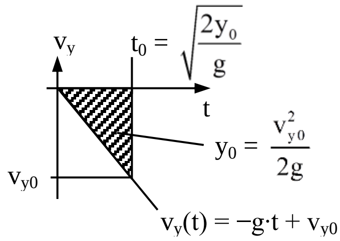
Bremszeit: Aus $0 = v_{x0}\cdot t_0 + a$ folgt $t_0 = -\frac{v_{x0}}{a}$



Bremsweg: Dreiecksfläche $x_0 = \frac{1}{2}a\cdot t_0^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_{x0}}{a}\right)^2 = \frac{v_{x0}^2}{2a}$.

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 14

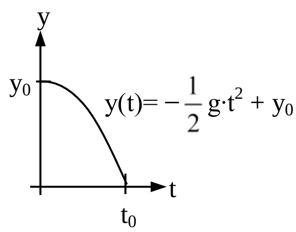
1.2.9. Der freie Fall



Ein Körper fällt aus der Höhe y_0 unter der in **negative y-Richtung** wirkenden **Fallbeschleunigung** $g \approx 10$ m/s^2.

Fallzeit: Aus $0 = -\frac{1}{2}g\cdot t_0^2 + y_0$ folgt $t_0 = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$

(− für Abwurf und + für Aufprall)

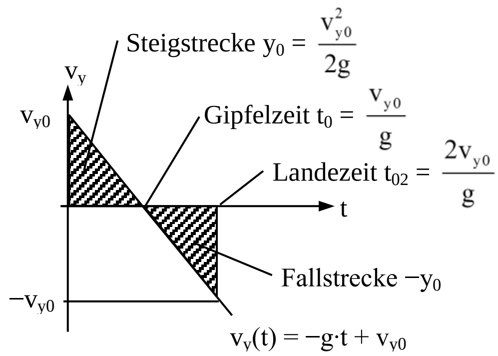


Fallgeschwindigkeit: $v_y(t_0) = -g\cdot t_0 = \mp\sqrt{2\cdot g\cdot y_0}$

(+ für Aufstieg und – für Abstiegt)

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 15 und 16

1.2.10. Der senkrechte Wurf



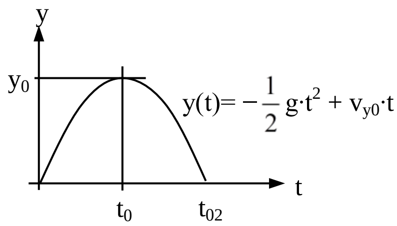
Ein Körper wird mit **Anfangsgeschwindigkeit** v_{y0} in positive y-Richtung geworfen, steigt infolge der **Verzögerung durch die Fallbeschleunigung** g aber nur bis zur Höhe y_0 und kehrt im **freien Fall** wieder zum Boden zurück.

Aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm erkennt man, das **Aufstieg** und **Abstieg symmetrisch** zueinander sind und dem **freien Fall** entsprechen.

Die Flugdauer ist deshalb genau doppelt so lang wie beim freien Fall und die Aufprallgeschwindigkeit ist umgekehrt gleich der Abwurfgeschwindigkeit:

Flugzeitbestimmung mit der **Geschwindigkeit-Zeit-Gleichung**:

Aus $0 = -gt_0 + v_{y0}$ folgt die **Gipfelzeit** $t_0 = \frac{v_{y0}}{g}$. Da die Steigstrecke gleich der Fallstrecke ist, sind die beiden Dreiecke flächengleich und die **Landezeit** ist die **doppelte Gipfelzeit** $t_{02} = \frac{2v_{y0}}{g}$.



Flugzeitbestimmung mit der mit der **Ort-Zeit-Gleichung**:

Aus $0 = -\frac{1}{2}g\cdot t_0^2 + v_{y0}\cdot t_0 = -\frac{1}{2}g\cdot t_0\cdot(t_0 - \frac{2v_{y0}}{g})$ folgt **Startzeit** $t_{01} = 0$ und

Landezeit $t_{02} = \frac{2v_{y0}}{g}$.

Die **Flughöhe** folgt aus der **Dreiecksfläche** im **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:** $y_0 = \frac{1}{2}\cdot v_{y0}\cdot t_0 = \frac{v_{y0}^2}{2g}$.

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 17 und 18

1.2.11. Der waagrechte Wurf

Der waagrechte Wurf ist eine **Überlagerung** der

1. **geradlinig-gleichförmigen Bewegung mit Startgeschwindigkeit v_{x0} in x-Richtung**

und des

2. **freien Falls aus der Starthöhe y_0**

Vom **freien Fall** (1.2.9) kann man übernehmen

$\boxed{\textbf{Fallzeit } t_0 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}}$

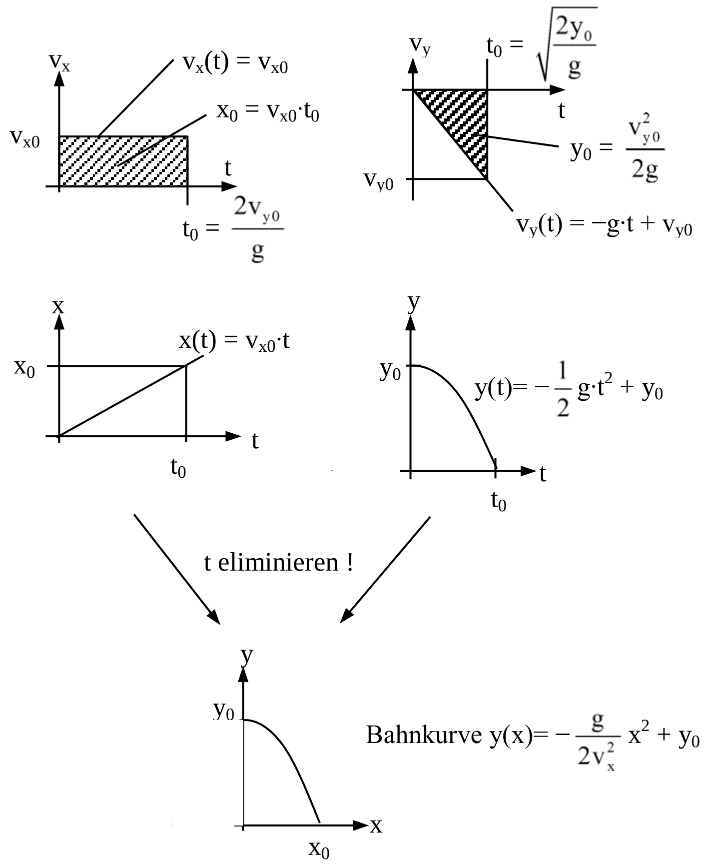
und daraus erhält man die

$\boxed{\textbf{Flugweite } x_0 = v_x \cdot t_0}$

Durch Auflösen von $x(t) = v_x \cdot t$ nach $t = \frac{x}{v_x}$ und

Einsetzen in $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}\cdot t + y_0$ erhält man die **Bahnkurve** oder **Spur**

$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_x^2}\cdot x^2 + y_0}$.



Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 19 - 20

1.2.12. Der schiefe Wurf

Der schiefe Wurf ist eine **Überlagerung** der

1. **geradlinig-gleichförmigen Bewegung mit Startgeschwindigkeit v_{x0} in x-Richtung**

und des

2. **senkrechten Wurfes mit Startgeschwindigkeit v_{y0} in y-Richtung**.

Häufig gibt man den **Betrag** v_0 der Startgeschwindigkeit und den **Neigungswinkel** α zur Horizontalen an.
Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck

$$\boxed{v_0^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 \text{ bzw. } \tan(\alpha) = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}}$$

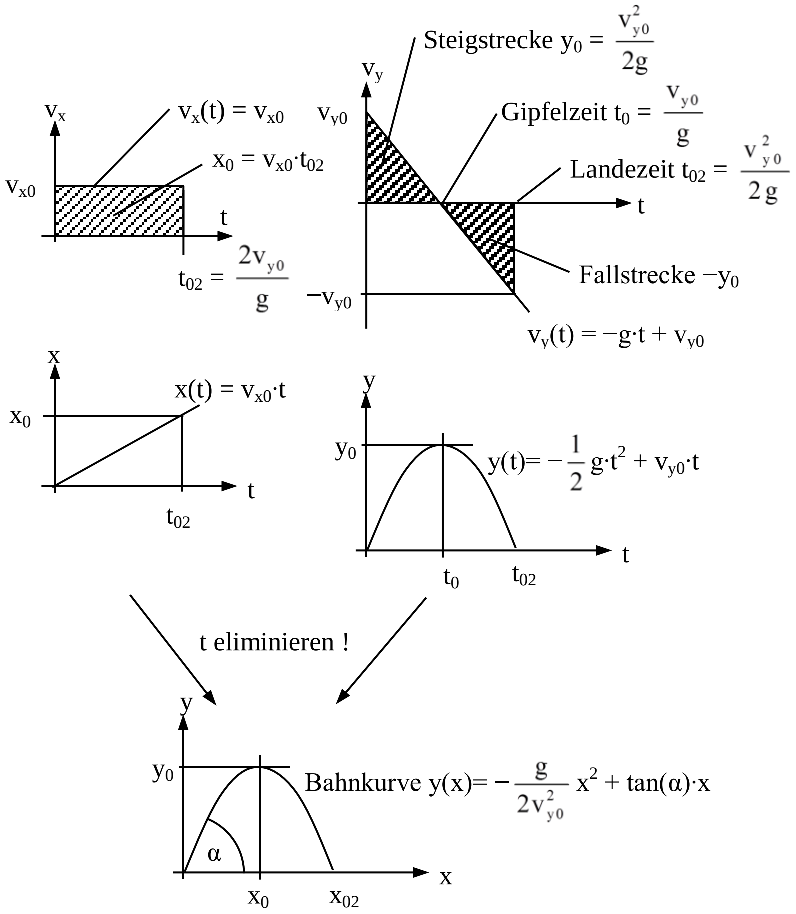
und

$$\boxed{v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\alpha) \text{ bzw. } v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\alpha)}$$

Vom **senkrechten Wurf in y-Richtung** (1.2.6.) kann man übernehmen

$$\boxed{\textbf{Gipfelzeit } t_0 = \frac{v_{y0}}{g}} \text{ bzw.}$$

$$\boxed{\textbf{Flugdauer} = \textbf{doppelte Gipfelzeit } t_{02} = \frac{2v_{y0}}{g}}.$$



und die

$$\boxed{\textbf{Flughöhe } y_0 = \frac{v_{y0}^2}{2g}}$$

Aus der **geradlinig gleichförmigen Bewegung** in x-Richtung (1.2.1.) ergibt sich durch Einsetzen der Flugdauer die

$$\boxed{\textbf{Flugweite } x_{02} = v_{x0} \cdot t_{02} = \frac{2 \cdot v_{x0} \cdot v_{y0}}{g}}$$

Durch Auflösen von $x(t) = v_{x0} \cdot t$ nach $t = \frac{x}{v_{x0}}$ und Einsetzen in $y(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_{y0} \cdot t + y_0$ erhält man die **Bahnkurve** oder **Spur**

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_{x0}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x + y_0}.$$

Oft setzt man noch die oben stehenden Beziehungen zum Neigungswinkel α ein:

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2 \cdot \cos(\alpha)^2 v_0^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0}$$

Übungen: Aufgaben zur Kinematik Nr. 21