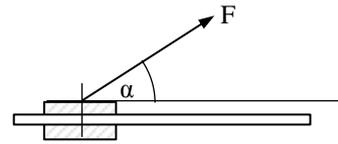


### 1.3. Aufgaben zur Statik

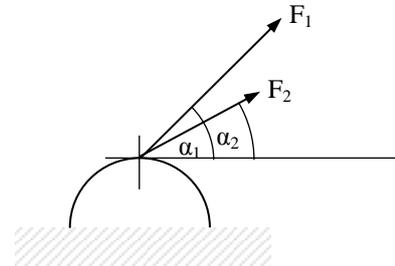
#### Aufgabe 1: Kräftezerlegung

Ein Schlitten kann auf einer Schiene horizontal bewegt werden. Im Winkel von  $\alpha = 40^\circ$  zur Schiene zieht ein Seil mit der Kraft  $F = 100 \text{ N}$  an dem Schlitten. Bestimme die Komponenten  $F_x$  und  $F_y$  der Kraft, welche parallel bzw. orthogonal zur Bewegungsrichtung wirken.



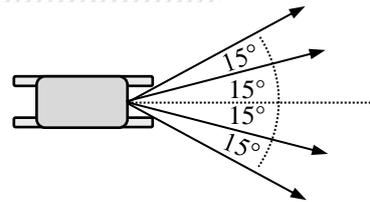
#### Aufgabe 2: Kräftezerlegung

Auf das Fundament der Verankerung eines abgespannten Mastes wirken zwei Seilkräfte  $F_1 = 300 \text{ N}$  und  $F_2 = 180 \text{ N}$  unter den Winkeln  $\alpha_1 = 45^\circ$  und  $\alpha_2 = 30^\circ$  zur Horizontalen. Berechne den Betrag der resultierenden Kraft und ihren Winkel zur Horizontalen.



#### Aufgabe 3: Kräftezerlegung

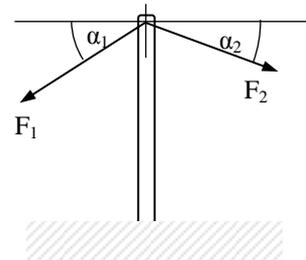
Ein Schlitten wird von vier Hunden mit jeweils  $600 \text{ N}$  in die rechts angegebenen Richtungen gezogen. Berechne die gesamte Zugkraft in Fahrtrichtung.



#### Aufgabe 4: Kräftezerlegung

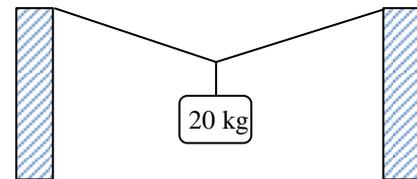
Ein Mast wird mit zwei Seilen unter den Winkeln  $\alpha_1 = 30^\circ$  und  $\alpha_2 = 20^\circ$  zur Horizontalen abgespannt. Die Seilkräfte betragen  $F_1 = 4 \text{ kN}$  und  $F_2 = 2 \text{ kN}$ .

- Bestimme den Betrag der resultierenden Kraft und ihren Winkel zur Vertikalen.
- Auf welchen Betrag muss man die Spannung im rechten Seil ( $F_2$ ) erhöhen, damit die resultierende Kraft nicht mehr schief ist?



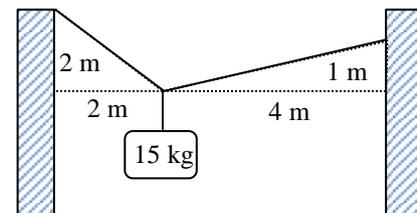
#### Aufgabe 5: Kräftezerlegung

Eine  $20 \text{ kg}$  schwere Lampe ist in der Mitte eines  $6 \text{ m}$  breiten Durchganges an einem Seil aufgehängt, welches dort  $1 \text{ m}$  durchhängt. Wie groß sind die Seilkräfte?



#### Aufgabe 6: Kräftezerlegung

Eine  $15 \text{ kg}$  schwere Lampe ist an einem Seil aufgehängt, welches mit den nebenstehenden Maßen befestigt ist. Wie groß sind die Seilkräfte?



#### Aufgabe 7: Gravitationskraft

- Berechne die Anziehungskraft, die zwei  $100\,000 \text{ t}$  schwere Supertanker aufeinander ausüben, die im Abstand von  $200 \text{ m}$  nebeneinander liegen.
- Berechne die Anziehungskraft, die zwei  $50 \text{ kg}$  schwere Menschen aufeinander haben, wenn sie sich bis auf  $1 \text{ m}$  nähern.

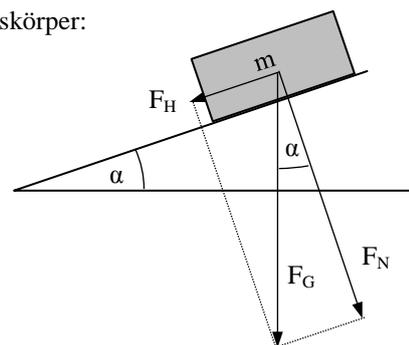
#### Aufgabe 8: Gravitationskraft

Berechne die Gravitationsfeldstärke auf der Oberfläche der folgenden Himmelskörper:

- Mond:  $m = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$  und  $r = 1738 \text{ km}$
- Venus:  $m = 5,8 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und  $r = 6100 \text{ km}$
- Jupiter:  $m = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$  und  $r = 71\,350 \text{ km}$

#### Aufgabe 9: Schiefe Ebene

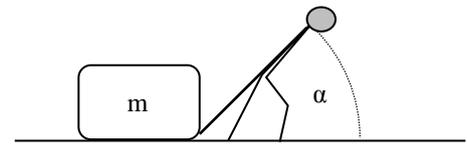
Eine Kiste mit der Masse  $m = 50 \text{ kg}$  sitzt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$  zur Horizontalen. Bestimme die Normalkraft  $F_N$ , welche den Körper senkrecht zur Ebene andrückt und die Hangabtriebskraft  $F_H$ , welche die Kiste parallel zur Ebene beschleunigt. Rechne mit  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .



### Aufgabe 10: Reibungskraft

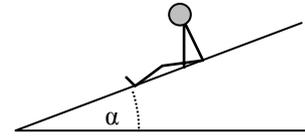
Ein Arbeiter will eine  $m = 100 \text{ kg}$  schwere Kiste an einem Seil über den Boden mit Gleitreibungskoeffizient  $\mu = 0,9$  ziehen.

- Zunächst zieht er waagrecht an dem Seil. Wie stark muss er ziehen? Rechne mit der Gravitationsfeldstärke  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .
- Nun bringt er das Seil weiter unten an und zieht unter einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  zur Horizontalen schräg nach oben an der Kiste. (siehe rechts) Wie stark muss er nun ziehen? Beachte, dass er durch den nach oben gerichteten Anteil der Kraft auch die Reibungskraft vermindert.



### Aufgabe 11: Schiefe Ebene

- Berechne die resultierende Beschleunigungskraft auf ein  $20 \text{ kg}$  schweres Kind, das mit seiner Nylon-Matschhose (Gleitreibungskoeffizient  $\mu = 0,3$ ) auf einer Rutsche mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 30^\circ$  sitzt. Rechne mit der Gravitationsfeldstärke  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .
- Welchen Neigungswinkel muss eine Rutsche mindestens aufweisen, wenn sie mit Jeans (Haftreibungszahl  $0,9$ ) noch funktionieren soll?
- Bei welcher Haftreibungszahl funktioniert die Rutsche aus a) nicht mehr?



### Aufgabe 12: Schiefe Ebene

Bei einem Umzug soll eine  $100 \text{ kg}$  schwere Truhe über eine  $45^\circ$  steile Bretterrampe zum 1. Stock hochgezogen werden. Mit welcher Kraft muss man ziehen, wenn die Haftreibungszahl  $\mu = 0,8$  beträgt? Rechne mit der Gravitationsfeldstärke  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .

### Aufgabe 13: Federkräfte

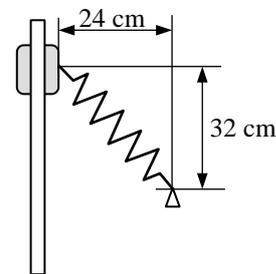
Um eine Feder um  $2 \text{ cm}$  aus der entspannten Lage zu dehnen, muss man mit  $20 \text{ N}$  ziehen.

- Welche Zugkraft benötigt man für die Dehnung um  $5 \text{ cm}$  aus der entspannten Lage?
- Welche Druckkraft benötigt man für die Stauchung um  $3 \text{ cm}$  aus der entspannten Lage?
- Wie stark ist die Dehnung bei einer Zugkraft von  $30 \text{ N}$ ?

### Aufgabe 14: Federkräfte

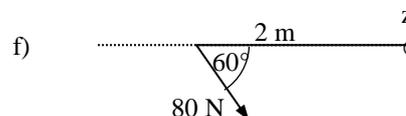
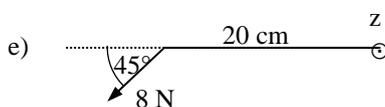
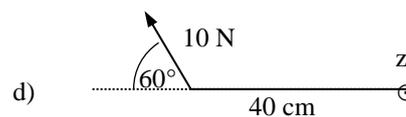
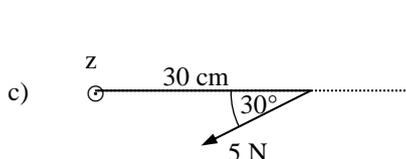
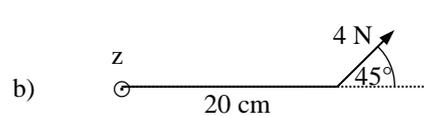
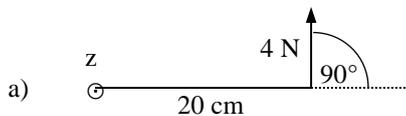
Eine Hülse ist auf einer senkrechten Schiene beweglich und wird von einer schräg befestigten Rückstellfeder gespannt, die im entspannten Zustand  $35 \text{ cm}$  lang ist und die Federkonstante  $D = 25 \text{ N/cm}$  besitzt.

- Berechne den Gesamtbetrag der Federkraft.
- Wie groß sind die Komponenten der Federkraft parallel zur Schiene (Rückstellkraft) und senkrecht zur Schiene?



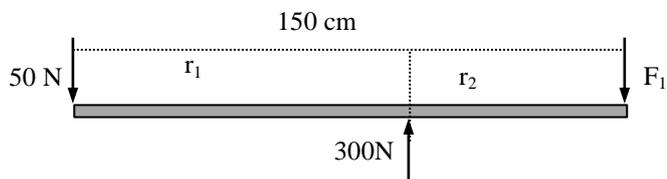
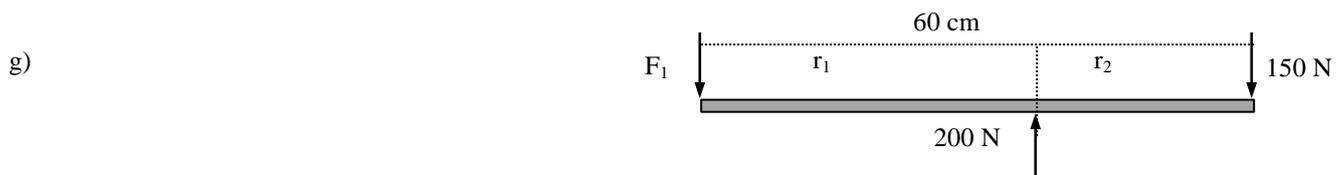
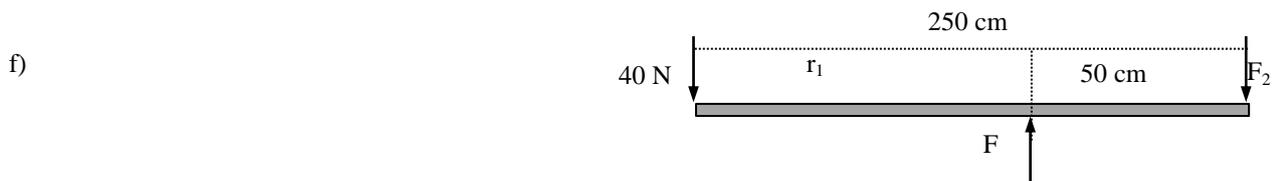
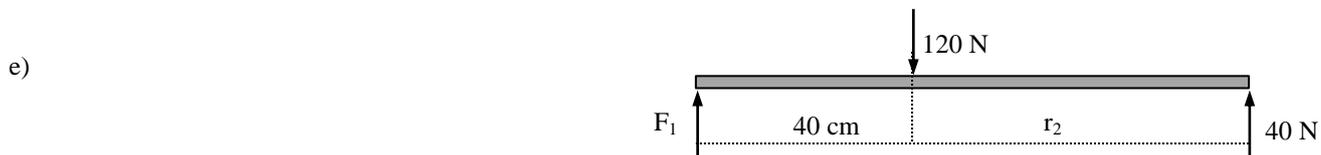
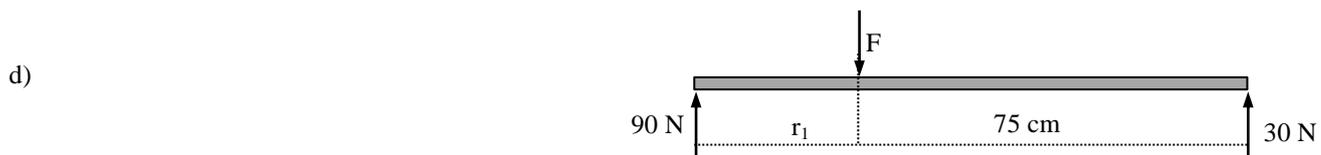
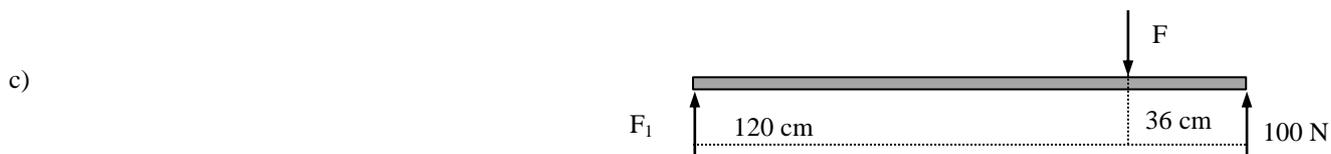
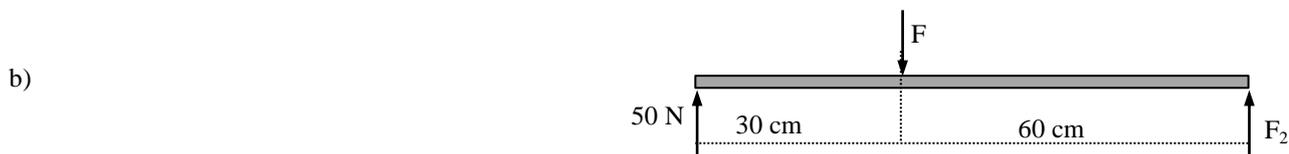
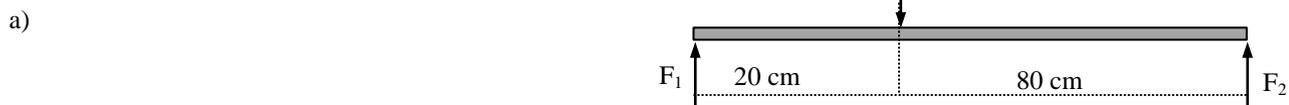
### Aufgabe 15: Drehmoment

Bestimme jeweils die Richtung und den Betrag des Drehmomentes bezogen auf die z-Achse.



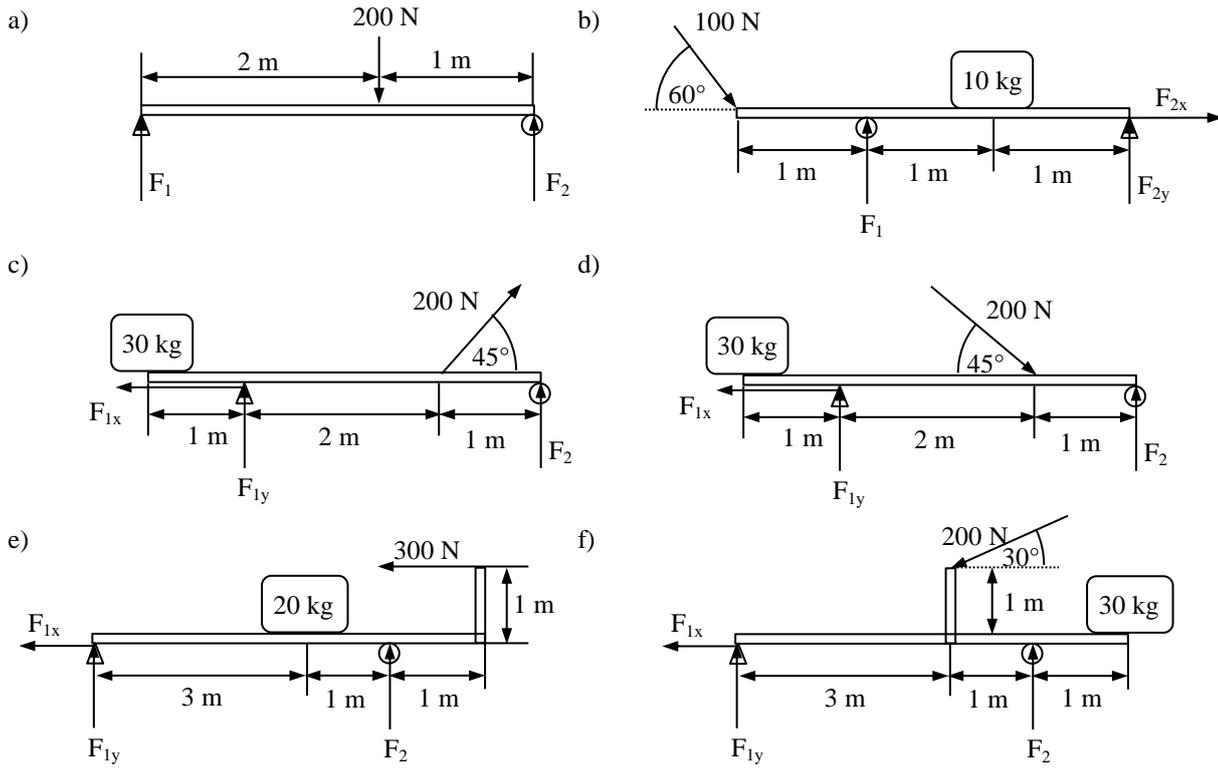
### Aufgabe 16: Hebelgesetz

Bestimme jeweils die fehlenden Kräfte und Hebelarme:



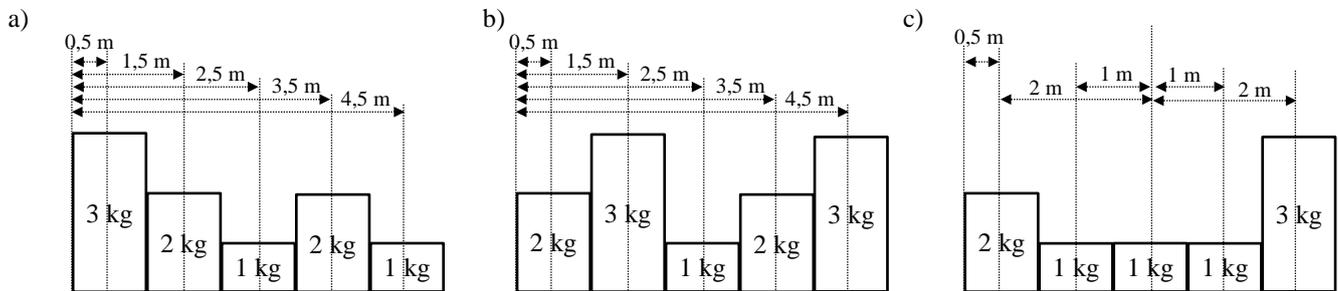
### Aufgabe 17: Gleichgewicht

Berechne jeweils Betrag und Richtung aller Lagerkräfte. Wähle selbst eine geeignete Bezugsachse für die Drehmomentbilanz.



### Aufgabe 18: Schwerpunkt

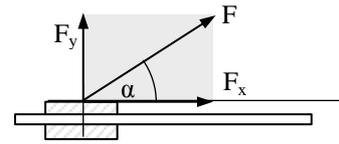
Bestimme jeweils den Schwerpunkt:



### 1.3. Lösungen zu den Aufgaben zur Statik

#### Aufgabe 1: Kräftezerlegung

$F_x = \cos(\alpha) \cdot F \approx 76,6 \text{ N}$  und  $F_y = \sin(\alpha) \cdot F \approx 64,3 \text{ N}$  (siehe rechts)



#### Aufgabe 2: Kräftezerlegung

Horizontale Komponente:  $F_x = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) + F_2 \cdot \cos(\alpha_2) \approx 368 \text{ N}$

Vertikale Komponente:  $F_y = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) + F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \approx 302 \text{ N}$

Winkel zur Horizontalen:  $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) \approx 39,4^\circ$

#### Aufgabe 3: Kräftezerlegung

$F = 2 \cdot \cos(15^\circ) \cdot 600 \text{ N} + 2 \cdot \cos(30^\circ) \cdot 600 \text{ N} \approx 2198,3 \text{ N}$

#### Aufgabe 4: Kräftezerlegung

a) Horizontale Komponente:  $F_x = -F_1 \cdot \cos(\alpha_1) + F_2 \cdot \cos(\alpha_2) \approx -2,68 \text{ kN}$

Vertikale Komponente:  $F_y = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) + F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \approx -1,58 \text{ kN}$

Winkel zur Vertikalen:  $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{F_x}{F_y} \right) = 30^\circ$  nach links.

b) Horizontale Komponente  $F_x = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) + F_2 \cdot \cos(\alpha_2) = 0$

$\Rightarrow F_2 = -F_1 \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} \approx 1,84 \text{ kN}$

#### Aufgabe 5: Kräftezerlegung

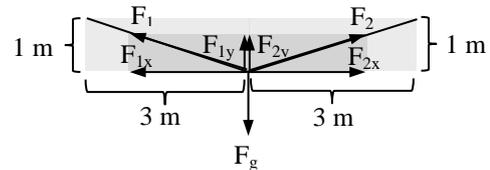
Aufgrund der Symmetrie sind die Kräfte jeweils auf beiden Seiten vom gleichen Betrag:

$\Rightarrow$  Vertikalkräfte:  $F_{1y} = F_{2y} = \frac{1}{2} F_g = 100 \text{ N}$ .

Da das Kräftedreieck durch zentrische Streckung aus dem Seildreieck hervorgeht, verhalten sich Vertikal- und Horizontalkräfte wie 1 : 3.

$\Rightarrow$  Horizontalkräfte  $F_{1x} = F_{2x} = 3F_y = 300 \text{ N}$

$\Rightarrow$  Seilkräfte  $F_1 = F_2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 316,2 \text{ N}$



Die Berechnung über  $\cos(\alpha)$  und  $\sin(\alpha)$  mit dem Winkel  $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \right)$

$\approx 18,43^\circ$  zur Horizontalen geht natürlich auch, ist aber etwas länger und liefert weniger exakte Ergebnisse.

#### Aufgabe 6: Kräftezerlegung

Da die Kräftedreiecke durch zentrische Streckung aus den Seildreiecken hervorgehen, verhalten sich Vertikal- und Horizontalkräfte wie die entsprechenden vertikalen und horizontalen Abschnitte der Aufhängungen. Jeder Meter entspricht  $n_1$  Newton auf der linken und  $n_2$  Newton auf der rechten Seite.

$\Rightarrow$  Horizontalkräfte  $F_{1x} = F_{2x} \Leftrightarrow 2n_1 = 4n_2 \Leftrightarrow n_1 = 2n_2$ .

$\Rightarrow$  Vertikalkräfte:  $F_g = F_{1y} + F_{2y} \Leftrightarrow 150 \text{ N} = 2n_1 + n_2$ .

Einsetzen  $\Rightarrow 150 \text{ N} = 4n_2 + n_2 = 5n_2 \Rightarrow n_2 = 30 \text{ N}$  und  $n_1 = 60 \text{ N}$

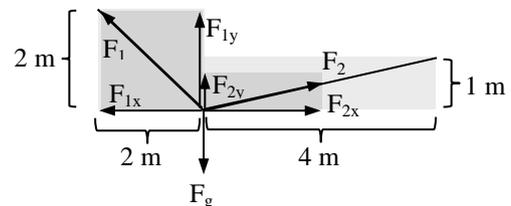
$\Rightarrow F_{1x} = 2n_1 = 120 \text{ N} = F_{2x} = F_{1y}$  und  $F_{2y} = n_2 = 30 \text{ N}$ .

$\Rightarrow$  Seilkräfte  $F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} \approx 169,7 \text{ N}$  und  $F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} \approx 123,7 \text{ N}$

Die Berechnung über  $\cos(\alpha)$  und  $\sin(\alpha)$  mit den Winkeln  $\alpha_1 = 45^\circ$  und

$\alpha_2 = \tan^{-1} \left( \frac{1}{4} \right) \approx 14,0^\circ$  zur Horizontalen geht natürlich auch, ist aber

deutlich (!) länger und liefert weniger exakte Ergebnisse.



#### Aufgabe 7: Gravitationskraft

a)  $F_G \approx 16,7 \text{ N}$

b)  $F_G \approx 4,17 \cdot 10^{-8} \text{ N}$

### Aufgabe 8: Gravitationskraft

- a)  $F_G \approx 1,6 \text{ N/kg}$
- b)  $F_G \approx 10,4 \text{ N/kg}$
- c)  $F_G \approx 24,9 \text{ N/kg}$

### Aufgabe 9: Schiefe Ebene

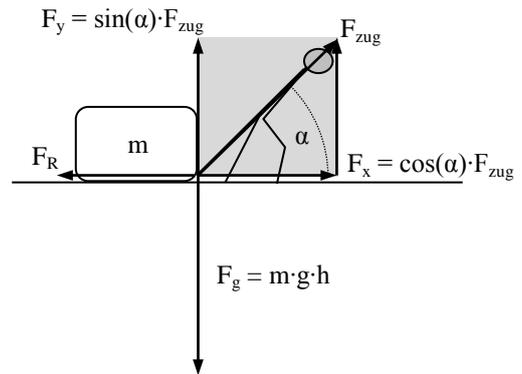
Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g = 500 \text{ N}$

Normalkraft  $F_N = \cos(\alpha) \cdot F_G \approx 469,8 \text{ N}$

Hangabtriebskraft  $F_H = \sin(\alpha) \cdot F_G = 171,0 \text{ N}$

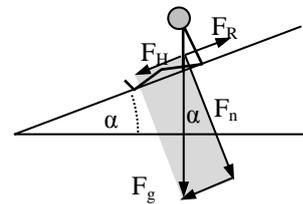
### Aufgabe 10: Reibungskraft

- a) Zugkraft = Reibungskraft  $F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g = 900 \text{ N}$
- b) Gewichtskraft  $F_g = m \cdot g$ ;  
Normalkraft  $F_n = F_g - F_y = m \cdot g - \sin(\alpha) \cdot F_{\text{zug}}$ ;  
Reibungskraft  $F_R = \mu \cdot F_n = \mu \cdot [m \cdot g - \sin(\alpha) \cdot F_{\text{zug}}]$   
Die Horizontalkomponente  $F_x = \cos(\alpha) \cdot F_{\text{zug}}$   
muss gleich der Reibungskraft  $F_R = \mu \cdot [m \cdot g - \sin(\alpha) \cdot F_{\text{zug}}]$  sein  
$$\Rightarrow F_{\text{zug}} = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)} \approx 669,9 \text{ N.}$$



### Aufgabe 11: Schiefe Ebene

- a) Gewichtskraft  $F_g = m \cdot g = 200 \text{ N}$ ; Normalkraft  $F_n = \cos(\alpha) \cdot F_g \approx 173,2 \text{ N}$ ; Reibungskraft  $F_r = F_n \cdot \mu \approx 52 \text{ N}$ ; Hangabtriebskraft  $F_H = \sin(\alpha) \cdot F_G = 100 \text{ N} \Rightarrow$  Beschleunigungskraft  $F_a = F_t - F_R \approx 48 \text{ N}$ .
- b) Das Kind fängt an zu rutschen, wenn die resultierende Kraft  $F_H - F_R = 0$  ist. Durch Einsetzen erhält man  
$$0 = \sin(\alpha) \cdot F_G - \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot F_G = [\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)] \cdot F_G \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \mu \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mu \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \mu \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(\mu) \approx 42^\circ.$$
- c) Ansatz wie bei b), aber diesmal löst man nach  $\mu$  auf:  $\mu = \tan(\alpha) \approx 0,58$ .



### Aufgabe 12: Schiefe Ebene

Da bei dieser Aufgabe nach oben gezogen wird, addieren sich diesmal Hangabtriebskraft und Reibungskraft zur Zugkraft  $F = F_H + F_R = [\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)] \cdot m \cdot g \approx 1272,8 \text{ N}$

### Aufgabe 13: Federkräfte

$D = 10 \text{ N/cm} \Rightarrow$  a)  $F(5 \text{ cm}) = 50 \text{ N}$       b)  $F(-3 \text{ cm}) = -30 \text{ N}$       c)  $s(30 \text{ N}) = 3 \text{ cm}$ .

### Aufgabe 14: Federkräfte

- a) Die gespannte Feder hat die Länge  $s = \sqrt{24^2 + 32^2} \text{ cm} = 40 \text{ cm}$  und wurde also um  $\Delta s = 5 \text{ cm}$  gedehnt. Die dafür erforderliche Federkraft ist also  $\Delta F = D \cdot \Delta s = 125 \text{ N}$ .
- b) Die Komponente in Bewegungsrichtung ist  $F_y = \frac{32}{40} \cdot 125 \text{ N} = 100 \text{ N}$  und die Komponente senkrecht zur Schiene ist  $F_x = \frac{24}{40} \cdot 125 \text{ N} = 75 \text{ N}$  (Strahlensatz bzw. zentrische Streckung) Man kann natürlich auch wie gewohnt über den Winkel  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{32}{24}\right) \approx 53,13^\circ$  zur Schiene rechnen, aber die Rechnung ist länger und die Ergebnisse weniger exakt!

### Aufgabe 15: Drehmoment

- a)  $M = (+ 0,2 \text{ m}) \cdot (+ 4 \text{ N}) \cdot \sin(90^\circ) = + 0,8 \text{ Nm}$  (Linksdrehung)
- b)  $M = (+ 0,2 \text{ m}) \cdot (+ 4 \text{ N}) \cdot \sin(45^\circ) \approx + 0,57 \text{ Nm}$  (Linksdrehung)
- c)  $M = (+ 0,3 \text{ m}) \cdot (+ 4 \text{ N}) \cdot \sin(30^\circ) = + 0,6 \text{ Nm}$  (Rechtsdrehung)
- d)  $M = (- 0,4 \text{ m}) \cdot (- 5 \text{ N}) \cdot \sin(60^\circ) \approx + 1,73 \text{ Nm}$  (Rechtsdrehung)
- e)  $M = (- 0,2 \text{ m}) \cdot (+ 10 \text{ N}) \cdot \sin(45^\circ) \approx - 1,41 \text{ Nm}$  (Linksdrehung)
- f)  $M = (- 2 \text{ m}) \cdot (- 80 \text{ N}) \cdot \sin(60^\circ) \approx + 138,56 \text{ Nm}$  (Linksdrehung)

**Aufgabe 16: Hebelgesetz**

- a) Kräfte:  $50 \text{ N} = F_1 + F_2$   
 Drehmomente:  $20 \text{ cm} \cdot 50 \text{ N} = 100 \text{ cm} \cdot F_2$   
 $\Rightarrow \underline{F_2 = 10 \text{ N}}$  und  $\underline{F_1 = 40 \text{ N}}$
- b) Kräfte:  $F = 50 \text{ N} + F_2$   
 Drehmomente:  $30 \text{ cm} \cdot 50 \text{ N} = 60 \text{ cm} \cdot F_2$   
 $\Rightarrow \underline{F = 75 \text{ N}}$  und  $\underline{F_2 = 25 \text{ N}}$
- c) Kräfte:  $F = F_1 + 100 \text{ N}$   
 Drehmomente:  $120 \text{ cm} \cdot F_1 = 36 \text{ cm} \cdot 100 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F_1 = 30 \text{ N}}$  und  $\underline{F = 130 \text{ N}}$
- d) Kräfte:  $F = 90 \text{ N} + 30 \text{ N}$   
 Drehmomente:  $r_1 \cdot 90 \text{ N} = 75 \text{ cm} \cdot 30 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F = 120 \text{ N}}$  und  $\underline{r_1 = 25 \text{ cm}}$
- e) Kräfte:  $120 \text{ N} = F_1 + 40 \text{ N}$   
 Drehmomente:  $40 \text{ cm} \cdot F_1 = r_2 \cdot 40 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F_1 = 80 \text{ N}}$  und  $\underline{r_2 = 80 \text{ cm}}$
- f) Kräfte:  $F = 40 \text{ N} + F_2$   
 Drehmomente:  $50 \text{ cm} \cdot F = 250 \text{ cm} \cdot 40 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F = 200 \text{ N}}$ ,  $\underline{F_2 = 160 \text{ N}}$  und  $\underline{r_1 = 200 \text{ cm}}$
- g) Kräfte:  $200 \text{ N} = F_1 + 150 \text{ N}$   
 Drehmomente:  $60 \text{ cm} \cdot 150 \text{ N} = r_1 \cdot 200 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F_1 = 50 \text{ N}}$ ,  $\underline{r_1 = 45 \text{ cm}}$  und  $\underline{r_2 = 15 \text{ cm}}$
- h) Kräfte:  $300 \text{ N} = F_1 + 150 \text{ N}$   
 Drehmomente:  $150 \text{ cm} \cdot 50 \text{ N} = r_2 \cdot 300 \text{ N}$   
 $\Rightarrow \underline{F_1 = 250 \text{ N}}$ ,  $\underline{r_1 = 125 \text{ cm}}$  und  $\underline{r_2 = 25 \text{ cm}}$

**Aufgabe 17: Gleichgewicht**

- a)  $F_1 \approx 66,7 \text{ N}$  und  $F_2 \approx 133,3 \text{ N}$
- b)  $F_1 = 179,9 \text{ N}$ ,  $F_{2y} \approx 6,7 \text{ N}$  und  $F_{2x} = -50 \text{ N}$
- c)  $F_{1x} \approx 141,4 \text{ N}$ ,  $F_{1y} \approx 635,7 \text{ N}$  und  $F_2 = -194,3 \text{ N}$
- d)  $F_{1x} \approx 141,4 \text{ N}$ ,  $F_{1y} \approx 447,1 \text{ N}$  und  $F_2 = -5,7 \text{ N}$
- e)  $F_{1x} = -300 \text{ N}$ ,  $F_{1y} = 125 \text{ N}$  und  $F_2 = 75 \text{ N}$
- f)  $F_{1x} = -173,2 \text{ N}$ ,  $F_{1y} \approx 6,7 \text{ N}$  und  $F_2 \approx 406,7 \text{ N}$

**Aufgabe 18: Schwerpunkt**

- a)  $r = \frac{0,5 \cdot 3 + 1,5 \cdot 2 + 2,5 \cdot 1 + 3,5 \cdot 2 + 4,5 \cdot 1}{3 + 2 + 1 + 2 + 1} \text{ m} = 2,05 \text{ m}$  vom linken Ende
- b)  $r = \frac{0,5 \cdot 2 + 1,5 \cdot 3 + 2,5 \cdot 1 + 3,5 \cdot 2 + 4,5 \cdot 3}{2 + 3 + 1 + 2 + 3} \text{ m} = 2,59 \text{ m}$  vom linken Ende
- c)  $r = \frac{0,5 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 2,5 \cdot 1 + 3,5 \cdot 1 + 4,5 \cdot 3}{2 + 1 + 1 + 1 + 3} \text{ m} = 2,75 \text{ m}$  vom linken Ende