1.3. Statik

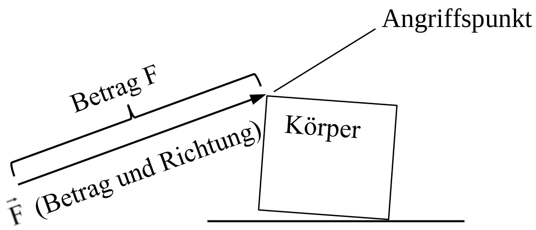
1.3.1. Kräfte

Zug- und Druckfeder, Expander, Kraftmesser: ⇒ Je größer die Kraft, desto größer die Verformung

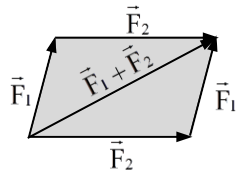
mit Kraftmesser an OHP-Projektor, Stuhl, oder Presenter ziehen ⇒ Je größer die Kraft, desto größer die Beschleunigung. Die Richtung der Beschleunigung hängt ab von Betrag, Richtung und Angriffspunkt der Kraft.

Kräfte bewirken **Verformungen** und **Bewegungsänderungen**. Die Wirkung einer Kraft wird bestimmt durch

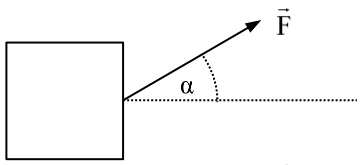
- Angriffspunkt
- Richtung
- Betrag



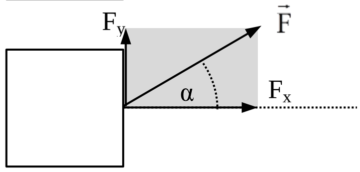
Solche gerichtete Größen nennt man **Vektoren** (lat. *vehere = bewegen*, vgl. Vehikel) und stellt sie mit **Pfeilen** dar. Der **Betrag F** einer **Kraft $\vec{F}$** (*engl force = Kraft*) entspricht der **Länge** des Kraftpfeils. Sie wird mit einem **Federkraftmesser** bestimmt und in **Newton N** (nach *Isaac Newton 1743 - 1727*) angegeben. Wirken zwei Kräfte auf einen Angriffspunkt, so lassen sie sich durch Hintereinanderlegen der Pfeile zu einer **resultierenden Kraft** addieren. (**Vektoraddition**). Umgekehrt lässt sich ein Kraftpfeil in zwei **Komponenten** zerlegen, deren Summe wieder den ursprünglichen Kraftpfeil ergibt. Die beiden Komponenten bilden die Seiten und die Resultierende die Diagonale des **Kräfteparallelogramms**. Sehr häufig zerlegt man Kräfte in **rechtwinklige** Komponenten, deren Beträge dann mit **trigonometrischen Funktionen** und dem **Satz des Pythagoras** bestimmt werden können.



Beispiel 1: Kräftezerlegung
Bestimme die horizontale Komponente F_x und die vertikale Komponente F_y der Zugkraft $\vec{F}$ = 100 N, welche im Winkel von α = 30° zur Horizontalen an der Kiste angreift.

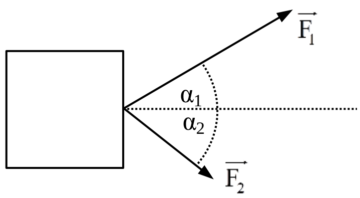


Lösung:
$F_x = \cos(\alpha)\cdot F \approx 86{,}6$ N und $F_y = \sin(\alpha)\cdot F = 50$ N.



Beispiel 2: Resultierende
Zwei Kräfte F_1 = 200 N und F_2 = 120 N greifen unter den Winkeln α_1 = 30° und α_2 = −45° zur Horizontalen an der Kiste an.

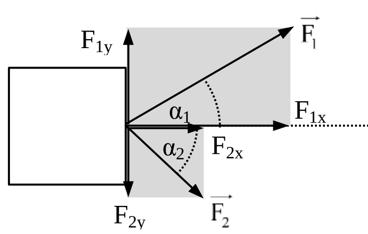
a) Bestimme den Betrag der resultierenden Kraft F und ihren Winkel α zur Horizontalen.
b) Wie muss der Betrag von F_2 geändert werden, damit die Vertikalkomponente verschwindet?



Lösung:

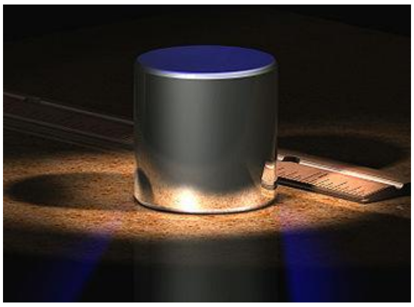
a) Horizontal: $F_x = F_{1x} + F_{2x} = \cos(\alpha_1)\cdot F_1 + \cos(\alpha_2)\cdot F_2 \approx 258{,}1$ N
Vertikal: $F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 \approx 15{,}1$ N
Winkel zur Horizontalen $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \approx 3{,}35°$

b) Vertikale Komponente: $F_y = F_{1y} + F_{2y} = \sin(\alpha_1)\cdot F_1 + \sin(\alpha_2)\cdot F_2 = 0$
$\Leftrightarrow F_2 = F_1 \dfrac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} \approx 141{,}1$ N.



Übungen: Aufgaben zur Statik Nr. 1 - 6

1.3.2. Gravitation



Die **Masse m** eines Körpers wird mit einer **Waage** bestimmt und in **Kilogramm kg** angegeben. Das **Urkilogramm** wird in Sèvres bei Paris gelagert. (siehe rechts) In der klassischen Mechanik besitzt die Masse zwei verschiedene Eigenschaften:

a) **Trägheit (Inertia)**: Eine Masse m widersetzt sich einer Kraft $\vec{F}$, so dass ihre resultierende Beschleunigung nur noch $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ beträgt.

b) **Schwere (Gravitation)** Zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r ziehen sich gegenseitig an mit der **Gravitationskraft** $F_G = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit der **Gravitationskonstante** $\gamma \approx 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Beispiel 1: Gravitationskraft
Berechne die Gewichtskraft eines 1 kg schweren Körpers (m_1 = 1 kg) in Meereshöhe und in 1000 m Höhe. Die Erde hat den Radius $r \approx 6378$ km und die Masse $m_2 = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

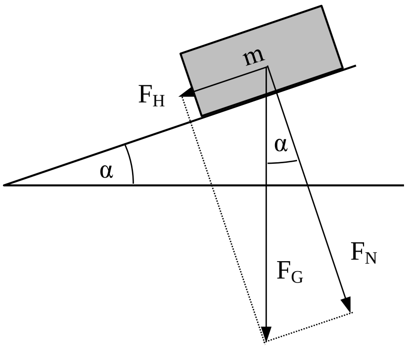
Lösung:
$F_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \approx 9{,}808 \frac{N}{kg}$ auf Meereshöhe und $F_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(r + 1000\,m)^2} \approx 9{,}805 \frac{N}{kg}$ in 1000 m Höhe.

Wie man sieht, ist die Gravitationskraft auf einen 1 kg schweren Körper auf der Erdoberfläche nahezu konstant. Für einen Körper der Masse m gilt $F_g = m \cdot g$ mit der **Gravitationsfeldstärke** $g \approx 9{,}81 \frac{N}{kg}$. Häufig rechnet man genähert mit $g \approx 10 \frac{N}{kg}$.

Beispiele 2: Gravitationsfeldstärke
Berechne die Gewichtskraft F_g für die folgenden Massen mit $g \approx 10 \frac{N}{kg}$: m_1 = 1 g; m_2 = 100 g und m_3 = 1 t.

Lösung:
F_{1g} = 10 mN; F_{2g} = 1 N und F_{3g} = 10 kN.

Beispiel 3: Schiefe Ebene
Eine Kiste mit der Masse m = 100 kg sitzt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α = 30° zur Horizontalen. Bestimme die **Normalkraft F_N**, welche die Kiste senkrecht zur Ebene andrückt und die **Hangabtriebskraft F_H**, welche die Kiste parallel zur Ebene beschleunigt. (siehe rechts)



Lösung:
Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = 1000$ N
Normalkraft $F_N = \cos(\alpha) \cdot F_G \approx 866$ N
Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha) \cdot F_G = 500$ N

Übungen: Aufgaben zur Statik Nr. 7 - 9

1.3.3. Reibungskräfte

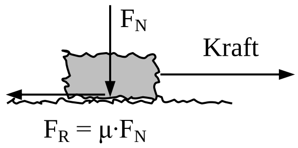
Die **Reibungskraft F_R** eines Körpers auf einer Unterlage kommt durch das Ineinandergreifen der Unebenheiten der Kontaktflächen zustande. Sie wirkt parallel zur Kontaktfläche als Gegenkraft zu jeder angreifenden Kraft. Die **Haftreibungskraft** ist durch die Verhakung der Unebenheiten immer größer als die **Gleitreibungskraft**. Durch das Lösen bzw. Einsetzen der Verhakung gibt es beim Anfahren und zum Stehen kommen immer einen kleinen **Ruck**. Die Reibungskraft ist proportional zur **Normalkraft F_N** senkrecht zur Berührungsfläche. Die Proportionalitätskonstante heißt **Reibungszahl μ**. Es gilt also

$$\boxed{F_R = \mu \cdot F_N.}$$

Reibungszahl für	Haftreibung	Gleitreibung
Holz auf Holz	0,6	0,4
Stahl auf Stahl	0,15	0,1
Stahl auf Eis	0,03	0,01
Reifen auf trockener Straße	1,0	0,6
Reifen auf nasser Straße	0,5	0,3
Reifen auf Eis	0,1	0,05

Beispiel 1: Bremskraft

Bestimme die maximale Bremskraft (Reibungskraft) eines m = 1 t schweren Autos auf trockener Straße, nasser Straße und Eis.



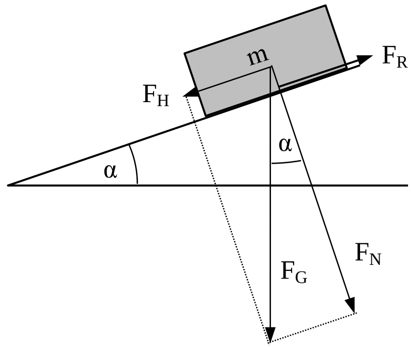
Lösung:

Mit der Normalkraft $F_N = F_g = m \cdot g = 10$ kN erhält man:
auf trockener Straße: $F_R = 1 \cdot F_N = 10$ kN
auf nasser Straße: $F_R = 0{,}5 \cdot F_N = 5000$ N
auf Eis: $F_R = 0{,}1 \cdot F_N = 1000$ N.

Beispiel 2: Schiefe Ebene

Eine Kiste mit der Masse m = 20 kg sitzt auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α = 25° zur Horizontalen und der Haftreibungszahl μ = 0,8.

a) Bestimme die **Reibungskraft F_R** und die **Hangabtriebskraft F_H**.
b) Bei welchem Neigungswinkel α fängt die Kiste an zu rutschen?



Lösung:

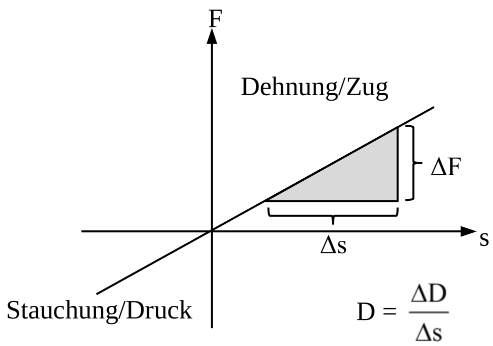
a) Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = 200$ N
   Normalkraft $F_N = \cos(\alpha) \cdot F_G \approx 181{,}3$ N
   Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha) \cdot F_G = 84{,}5$ N
   Reibungskraft $F_R = \mu \cdot F_N \approx 145{,}0$ N
b) Die Kiste fängt an zu rutschen, wenn die resultierende Kraft $F_H - F_R = 0$ ist. Durch Einsetzen erhält man
   $0 = \sin(\alpha) \cdot F_G - \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot F_G = [\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)] \cdot F_G$
   $\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \mu \cdot \cos(\alpha)$
   $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \mu$
   $\Leftrightarrow \tan(\alpha) = \mu$
   $\Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(\mu) \approx 38{,}65°$

Übungen: Aufgaben zur Statik Nr. 10 - 12

1.3.4. Federkräfte

Alle kristallinen (Salze und Metalle) und vernetzte makromolekulare Feststoffe (Kautschuk, Gummi, Kollagen, Holz) verhalten sich unter Belastung in gewissen Grenzen **elastisch**: Solange die Bindungen nicht zerstört werden, kehren sie bei nachlassender Belastung wieder in ihre ursprüngliche Form zurück. Die Verformung um die Strecke s aus der ursprünglichen Form ist in diesem Bereich proportional zur angreifenden Kraft F. Die Proportionalitätskonstante heißt allgemein **Elastizitätsmodul** und bei Federn auch

Federkonstante $D = \dfrac{\Delta F}{\Delta s} = \dfrac{F}{s}$ (Ursprungsgerade!) mit Einheit $\dfrac{N}{m}$.



Beispiel:

Um eine Feder um 3 cm aus der entspannten Lage zu dehnen, muss man mit 15 N ziehen.

a) Welche Zugkraft benötigt man für die Dehnung um 5 cm aus der entspannten Lage?
b) Welche Druckkraft benötigt man für die Stauchung um 2 cm aus der entspannten Lage?
c) Wie stark ist die Dehnung bei einer Zugkraft von 20 N?

Lösungen:

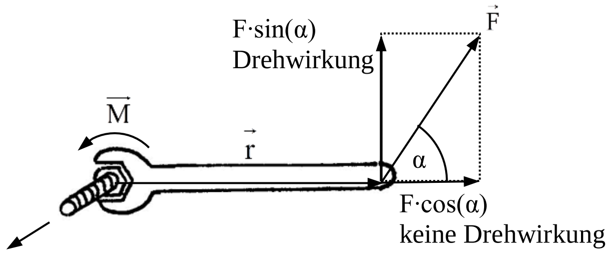
Die Federkonstante ist $D = \dfrac{F}{s} = 5$ N/cm = 500 N/m

a) Für s = 5 cm benötigt man $F = D \cdot s = 25$ N.
b) Für s = −2 cm benötigt man $F = D \cdot s = -10$ N.
c) Bei 20 N ist die Dehnung $s = \dfrac{F}{D} = 4$ cm.

Übungen: Aufgaben zur Statik Nr. 13 und 14

1.3.5. Drehmomente

FWU-Film Einfache Maschinen: Hebel



Drehmoment = Hebelarm · Kraft senkrecht zum Hebelarm

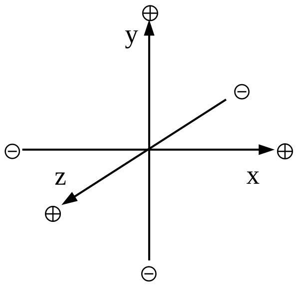
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Betrag: $M = r \cdot F \cdot \sin(\alpha)$

Richtung: Vorschubrichtung einer Rechtsschraube
Linksdrehung positiv (Schraube kommt nach vorne)
Rechtsdrehung negativ (Schraube geht nach hinten)

Rechte-Hand-Regel: Daumen × Zeigefinger = Mittelfinger

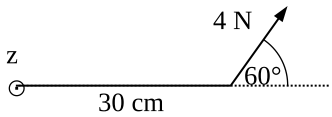
$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$



Einheit: Newtonmeter Nm

Beispiel 1: Berechnung eines Drehmoments

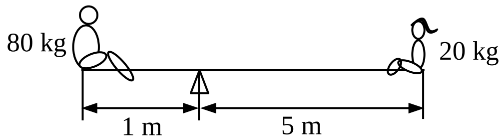
$M = +\,0{,}3\text{ m}\cdot 4\text{ N}\cdot\sin(60°)$
$\approx +\,1{,}04$ Nm (Linksdrehung



Beispiel 2: Summe von Drehmomenten (Hebelgesetz)

$\Sigma M = +\,1\text{ m}\cdot 800\text{ N} - 5\text{ m}\cdot 200\text{ N}$
$= 800\text{ Nm} - 1000\text{ Nm}$
$= -200$ Nm (Rechtsdrehung)

⇒ Vater steigt, Tochter sinkt



Übungen. Aufgaben zur Statik Nr. 15

1.3.6. Gleichgewicht

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn

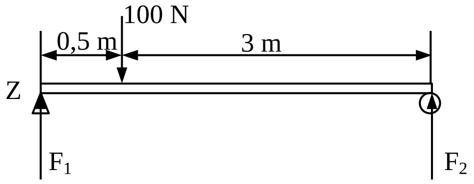
1. Die Summe aller äußeren **Kräfte** Null ist: $\Sigma \vec{F} = 0$ (keine **Translation**, 1. Newtonsches Axiom)
   In der Regel betrachtet man horizontale Kräfte ΣF_x und vertikale Kräfte ΣF_y getrennt.
2. Die Summe aller äußeren **Drehmomente bezogen auf den Punkt P** Null ist: $\Sigma \vec{M}_P = 0$ (keine **Rotation**)
   In der Schule beschränkt man sich auf Drehmomente ΣM_z um eine beliebige gewählte Bezugsachse z senkrecht zur Papierebene.

Aus diesen beiden Bedingungen lassen sich **Lagerkräfte** an Gerüsten und Maschinen berechnen. **Achslager** △ können vertikale und horizontale Kräfte übertragen, **Rollenlager** ○ dagegen nur vertikale Kräfte. Als Bezugsachse z für die Drehmomente wählt man dann eines der zu berechnenden Lager, so dass die Drehmomentbilanz nur noch eine unbekannte Kraft enthält.

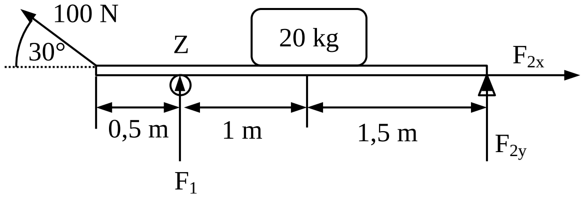
Beispiele
Berechne jeweils Betrag und Richtung der Lagerkräfte:

a) $\Sigma F_y = 0$
$F_1 + F_2 - 100\text{ N} = 0$

$\Sigma M_Z = 0$
$-\,0{,}5\text{ m}\cdot 100\text{ N} + 3{,}5\text{ m}\cdot F_2 = 0$
$-\,50\text{ Nm} + 3{,}5\text{ m}\cdot F_2 = 0$
$F_2 \approx \underline{14{,}3\text{ N}}$ und $F_1 = 100\text{ N} - F_2 \approx \underline{85{,}7\text{ N}}$



b) $\Sigma F_x = 0$



$\Rightarrow$ $F_{2x} = 100\ \mathrm{N} \cdot \cos(30°) \approx \underline{\underline{86{,}6\ \mathrm{N}}}$

$\Sigma F_y = 0$

$100\ \mathrm{N} \cdot \sin(30°) + F_1 - 200\ \mathrm{N} + F_{2y} = 0$

$\Rightarrow$ $F_1 + F_{2y} = 150\ \mathrm{N}$

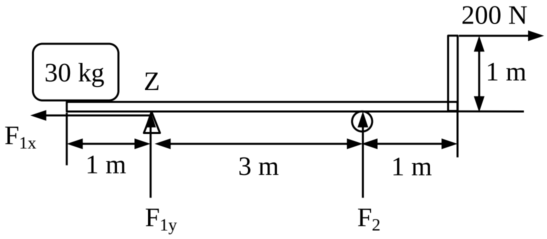
$\Sigma M_Z = 0$

$-0{,}5\ \mathrm{m} \cdot 100\ \mathrm{N} \cdot \sin(30°) - 1\ \mathrm{m} \cdot 200\ \mathrm{N} + 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot F_{2y} = 0$

$-25\ \mathrm{Nm} - 200\ \mathrm{Nm} = -2{,}5\ \mathrm{m} \cdot F_{2y}$

$\Rightarrow$ $F_{2y} = \underline{\underline{90\ \mathrm{N}}}$ und $F_1 = 150\ \mathrm{N} - F_{2y} \approx \underline{\underline{60\ \mathrm{N}}}$

c) $\Sigma F_x = 0$



$\Rightarrow$ $F_{1x} = \underline{\underline{200\ \mathrm{N}}}$

$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow$ $F_1 + F_{2y} = 300\ \mathrm{N}$

$\Sigma M_Z = 0$

$1\ \mathrm{m} \cdot 300\ \mathrm{N} + 3\ \mathrm{m} \cdot F_2 - 1\ \mathrm{m} \cdot 200\ \mathrm{N} = 0 \quad | - 3\ \mathrm{m} \cdot F_2$

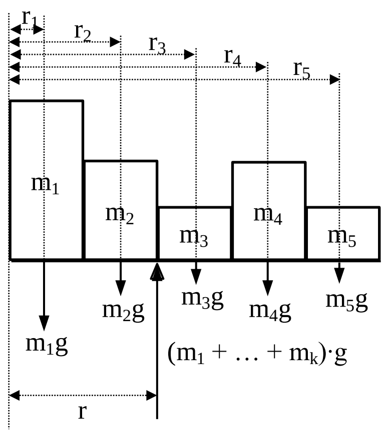
$100\ \mathrm{Nm} = -3\ \mathrm{m} \cdot F_2 \quad | :(-3\ \mathrm{m})$

$\Rightarrow$ $F_2 \approx -\underline{\underline{33{,}3\ \mathrm{N}}}$ (Zugkraft!) und
$F_{1y} = 300\ \mathrm{N} - F_2 \approx \underline{\underline{+\ 333{,}3\ \mathrm{N}}}$

Übungen. Aufgaben zur Statik Nr. 16

1.3.7. Schwerpunkte

Experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes bei Lineal, Geodreieck, usw.



Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Lagerpunkt, auf dem sich der Körper im Gleichgewicht befindet. Man bestimmt seine Lage mit Hilfe der Drehmomentbilanz für einen beliebigen Bezugspunkt Z. Wenn der Körper aus den Massen $m_1, \ldots, m_k$ mit den Hebelarmen $r_1, \ldots, r_k$ zusammengesetzt ist und r der Hebelarm bzw. die Position des Schwerpunktes ist, müssen die Drehmomente $r_1 \cdot m_1 \cdot g, \ldots$ der einzelnen Massen durch das Drehmoment der gesamten Gewichtskraft am Lagerort r ausgeglichen werden. Es muss gelten

$$\Sigma M_Z = 0$$

$$r \cdot (m_1 + \ldots + m_k) \cdot g - (r_1 m_1 + \ldots + r_k m_k) \cdot g = 0$$

$$r \cdot (m_1 + \ldots + m_k) - r_1 m_1 + \ldots + r_k m_k = 0$$

$$\boxed{r = \frac{r_1 \cdot m_1 + \ldots + r_k \cdot m_k}{m_1 + \ldots + m_k}}$$

Übungen. Aufgaben zur Statik Nr. 17