1.4. Prüfungsaufgaben zur Dynamik

Aufgabe 1: 2. Newtonsches Axiom (6)

a) Welche Kraft benötigt man, um einen 5 t schweren Körper in 2 Sekunden von 0 auf 3 m/s zu beschleunigen? (1)
b) Wie schnell wird ein 2 t schweres Auto nach 5 Sekunden, wenn seine Reifen jede Sekunde eine Kraft von 8 kN auf die Straße übertragen? (1)
c) Mit welcher Kraft wird ein 80 kg schweren Fahrer gegen den Airbag geschleudert, wenn er mit 36 km/h auf einen Brückenpfeiler prallt und dabei in 0,1 s zum Stillstand kommt? Welchem Gewicht entspricht diese Kraft? (2)
d) Wie schwer ist ein Körper, der durch eine konstante Kraft von 800 N gleichmäßig aus der Ruhe heraus beschleunigt wird und dabei in 5 Sekunden eine Strecke von 100 m zurücklegt? (2)

Aufgabe 1: 2. Newtonsches Axiom (6)

a) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1{,}5\ \text{m/s}^2 \Rightarrow F = m \cdot a = 7{,}5\ \text{N}$ (1)
b) $a = \frac{F}{m} = 4\ \text{m/s}^2 \Rightarrow v = a \cdot t = 20\ \text{m/s} = 72\ \text{km/h}$ (1)
c) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 100\ \text{m/s}^2 \Rightarrow F = m \cdot a = 8000\ \text{N}$, entspricht einem Gewicht von $m = \frac{F}{g} = 800$ kg! (2)
d) Aus $x = \frac{1}{2} a t^2$ ergibt sich ist $a = \frac{2x}{t^2} = 8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow m = \frac{F}{a} = 100$ kg. (2)

Aufgabe 2: Newtonsche Axiome (4)

In einem Aufzug wirken auf eine 80 kg schwere Person die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ und die Kraft $\vec{F}$ des Bodens, auf dem die Person steht. Rechne mit $g = 10\ \text{m/s}^2$. Welchen Betrag hat $\vec{F}$, wenn der Aufzug

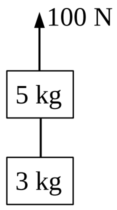
a) stillsteht (1)
b) mit $3\ \text{m/s}^2$ nach oben beschleunigt (1)
c) mit $-3\ \text{m/s}^2$ nach unten beschleunigt (1)
d) frei fällt? (1)

Aufgabe 2: Newtonsche Axiome (4)

a) $F_G = mg = 800$ N (1)
b) $F = mg + ma = 1040$ N (1)
c) $F = mg - ma = 560$ N (1)
d) $F = mg - mg = 0$ N (1)

Aufgabe 3: Dynamik (4)

Ein 5 kg schwerer Körper wird an einem Seil mit einer Kraft von 100 N nach oben gezogen. Unten hängt ein zweiter 3 kg schwerer Körper an dem ersten Körper.
Wie groß ist die Kraft, die zwischen den beiden Körpern wirkt? Rechne mit $g = 10\ \text{m/s}^2$.



Lösung (alles in SI)

Gemeinsame Beschleunigung $a = \frac{F - (m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} \approx 2{,}5\ \text{m/s}^2$ (2)

$\Rightarrow$ Seilkraft am unteren Seil $F_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \Rightarrow F_2 = m_2 \cdot (a + g) \approx 37{,}5$ N (2)

Aufgabe 4a: Dynamik (8)

a) Das neue 25 m lange Dampfkatapult der USS Enterprise konnte im Jahr 1940 ein 5,5 Tonnen schweres Propellerkampfflugzeug auf 108 km/h beschleunigen. Zeige, dass das Flugzeug nach $1,\overline{6}$ s das Katapult verlässt (2)
b) Wie groß ist die Beschleunigung, die auf Pilot und Flugzeug wirkt? (1)
c) Mit welcher Kraft wird der Pilot in den Sitz gedrückt und welchem Gewicht entspricht diese zusätzliche Belastung, wenn er 80 kg wiegt? (2)
d) Welche Kraft wirkt auf den Haken des Flugzeugs und welchem Gewicht entspricht diese Hakenkraft? (2)
e) Das Schiff selbst erreicht bei ruhiger See mindestens 62 km/h. Bei welcher Startgeschwindigkeit müssen die Flugzeuge abheben können? (1)

Lösung (alles in SI)

Aus dem zurückgelegtem Weg $x = \frac{1}{2}at^2$ und der erreichten Geschwindigkeit 108 km/h = 30 m/s = v = at folgt

a) die Beschleunigungszeit $t = \frac{2x}{v} = 1,\bar{6}$ s (2)

b) die Beschleunigung $a = \frac{v^2}{2x} = 18 \frac{m}{s^2}$, (1)

c) was einer Gewichtskraft F = ma = 1440 N bzw. einem zusätzlichen Gewicht von $\frac{F}{g}$ = 144 kg entspricht (2)

d) die notwendige Kraft $F = m \cdot a$ = 99 kN, was einer Gewichtskraft von 9,9 Tonnen entspricht. (2)

e) Die Flugzeuge mussten bei einer Windgeschwindigkeit von weniger als 170 km/h zum Abheben in der Lage sein. (1)

Aufgabe 4b: Dynamik (8)

Das 90 m lange elektromagnetische Katapult der neuesten USS Enterprise kann ein 45 Tonnen schweres Flugzeug auf 234 km/h beschleunigen.

a) Zeige, dass das Flugzeug nach 2,77 s das Katapult verlässt (2)
b) Wie groß ist die Beschleunigung, die auf Pilot und Flugzeug wirkt? (1)
c) Mit welcher Kraft wird der Pilot in den Sitz gedrückt und welchem Gewicht entspricht diese zusätzliche Belastung, wenn er 80 kg wiegt? (2)
d) Welche Kraft wirkt auf den Haken des Flugzeugs und welchem Gewicht entspricht diese Hakenkraft? (1)
e) Das Schiff selbst erreicht bei ruhiger See mindestens 56 km/h. Bei welcher Startgeschwindigkeit müssen die Flugzeuge abheben können? (1)

Lösung (alles in SI)

Aus dem zurückgelegtem Weg $x = \frac{1}{2}at^2$ und der erreichten Geschwindigkeit 234 km/h = 65 m/s = v = at folgt

a) die Beschleunigungszeit $t = \frac{2x}{v} \approx 2,77$ s (2)

b) die Beschleunigung $a = \frac{v^2}{2x} \approx 23,48 \frac{m}{s^2}$, (1)

c) was einer Gewichtskraft F = ma = 1877,8 N bzw. einem zusätzlichen Gewicht von $\frac{F}{g}$ = 189 kg entspricht (2)

d) die notwendige Kraft $F = m \cdot a$ = 1065,25 KN, was einem Gewicht von 106 Tonnen entspricht. (2)

e) Die Flugzeuge müssen bei einer Windgeschwindigkeit von weniger als 290 km/h zum Abheben in der Lage sein. (1)

Aufgabe 4c: Dynamik (6)

Ein Düsenjet muss eine Notlandung auf einem Flugzeugträger machen und benötigt für den Auftrieb eine Windgeschwindigkeit von 240 km/h unter den Flügeln.

Das Schiff beschleunigt auf 54 km/h und dreht in den Wind, der mit 36 km/h relativ zur Erdoberfläche bläst.

Die Halteseile auf dem Landedeck bringen das 40 t schwere Flugzeug in 2 Sekunden zum Stehen.

Eins der 4 Halteseile muss fassen, sonst fällt das tonnenschwere Flugzeug auf der anderen Seite ins Wasser und versinkt in wenigen Sekunden

Der Haken fasst das dritte von vier Seilen.

a) Wie groß ist die Windgeschwindigkeit relativ zum Schiff? (1)
b) Wie schnell ist das Flugzeug relativ zur Erdoberfläche bei minimaler Geschwindigkeit? (1)
c) Wie schnell ist das Flugzeug relativ zum Schiff bei minimaler Geschwindigkeit? (1)
d) Wie groß ist die Verzögerung (= negative Beschleunigung) des Flugzeugs beim Bremsvorgang? (1)
e) Welche Kraft wirkt auf den Fanghaken des Flugzeugs, mit dem es sich am Halteseil festhält? (1)
f) Mit welcher Kraft wird der 80 kg schwere verletzte Pilot dabei in die Gurte gedrückt? (1)

Lösungen (alles in SI)

a) Die Windgeschwindigkeit relativ zum Schiff ist 54 km/h + 36 km/h = 90 km/h (1)
b) Die minimale Geschwindigkeit bei Gegenwind ist 240 km/h − 36 km/h = 204 km/h (1)
c) Die minimale Geschwindigkeit relativ zum Schiff ist 205 km/h − 54 km/h = 150 km/h = $41,\bar{6}$ m/s (1)
d) Die Verzögerung ist $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 20{,}08\ m/s^2$. (1)
e) Die Kraft auf den Haken ist F = m·a = 803,2 KN und entspricht einem Gewicht von 80 Tonnen. (1)
f) Die Bremskraft auf den Piloten ist F = m·a = 1606,4 N und entspricht dem doppelten Körpergewicht! (1)

Aufgabe 5: Dynamik (8)
Ein 5 kg schwerer Mülleimer wird 0,1 s lang mit einer Kraft von 100 N beschleunigt und gleitet dann mit $\mu = 0{,}2$ weiter bis zum Stillstand. Wie weit rutscht der Mülleimer? Zeichne ein x-t- sowie ein v-t-Diagramm und gib die Dauer des gesamten Vorgangs an.

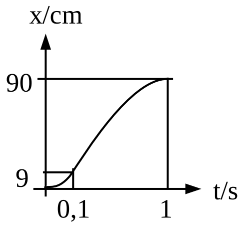
Lösung (alles in SI)

Beschleunigungsphase: $a_1 = \frac{F - \mu \cdot m \cdot g}{m} = 18\ \text{m/s}^2 \Rightarrow v_1 = a_1 \cdot t_1 = 1{,}8\ \text{m/s}$ und $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 0{,}09\ \text{m}$ (2)

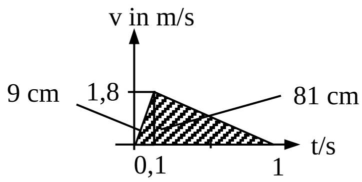
Verzögerungsphase: $a_2 = \frac{-\mu \cdot m \cdot g}{m} = -2\ \text{m/s}^2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_1}{a_2} = 0{,}9\ \text{s}$ und $x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 0{,}81\ \text{m}$ (2)

Der Mülleimer rutscht $x_1 + x_2 = 9\ \text{cm} + 81\ \text{cm} = 90\ \text{cm}$ weit und der ganze Vorgang dauert $t_1 + t_2 = 0{,}1\ \text{s} + 0{,}9\ \text{s} = 1\ \text{s}$. (1)

x-t-Diagramm (1)



v-t-Diagramm (2)



Aufgabe 6: Hangabtriebskraft und Überholvorgang (22)

Der rosa Autozug der ÖBB fährt die verbrutzelten Italienurlauber durch den Tauerntunnel zurück nach Deutschland. Nach dem letzten Tunnelbrand mit 100 Toten müssen die Fahrer ihre Autos während der Fahrt aber jetzt wieder verlassen und in den Personenwagen umsteigen.

a) Wie viele 2-Tonnen-Elektro-SUVs kann der Anhänger tragen? (2)
b) Welche Beschleunigung wird bei unbeladenem bzw. bei voll beladenem Zug erreicht, wenn die Lok mit maximal zulässiger Kupplungslast zieht? (2)

Lokführer Franzl sitzt heute zum ersten Mal in der nagelneuen Siemens - Lok „Dominator“ und geht wie von seiner alten „1144“ aus ÖBB-Eigenproduktion gewohnt im 1 % - Anstieg auf volle Leistung. Die Kupplung bricht sauber und der voll beladene Zug rollt sanft zurück in Richtung Süden.

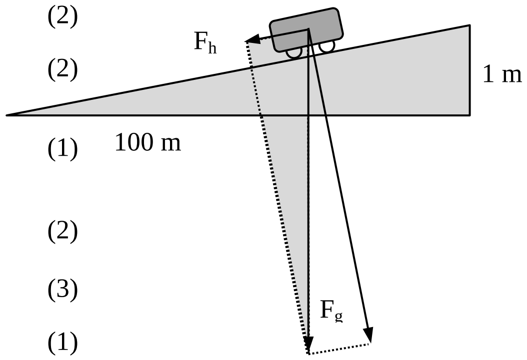
c) Begründe mit Hilfe einer Skizze, dass die Hangabtriebskraft des voll beladenen Wagens ca. 2700 N beträgt. **Hinweis**: 1 % bedeutet 1 m Höhe auf 100 m Strecke und die Gravitationskraft ist $F_g = m \cdot g$. (6)
d) Wie groß ist die Beschleunigung? **Hinweis**. Die Beschleunigungskraft ist $F = m \cdot a$. (1)

Franzl bemerkt nach 10 Sekunden und 100 m Fahrstrecke, dass der Zug nicht mehr da ist. Aber der „Dominator“ wird auch als „Railjet“ - Lok verkauft und schafft im „sportiv mode“ eine Beschleunigung von 1,1 m/s^2.

e) Zeige, dass er den Zug nach $1 + \sqrt{211} \approx 15{,}5$ weiteren Sekunden einholt. **Hinweis**: Ein mit der Beschleunigung a am Ort x_0 zur Zeit t_0 gestartetes Fahrzeug hat nach t Sekunden eine Strecke von $x(t) = \frac{1}{2} a (t - t_0)^2 + x_0$ zurückgelegt. (5)
f) Zeige, dass die Lok den Zug nach ca. 132,6 Metern einholt. Welche Strecke hat der Zug in dieser Zeit zurückgelegt? (2)
g) Zeige, dass die Lok den Zug mit ca. 61,5 km/h erreicht und der Zug zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens bereits 9 km/h schnell ist. (2)
h) Was bleibt Franzl jetzt zu tun, um den Zug zu retten? (1)
i) Welche Möglichkeiten haben die Fahrgäste, um einen einem stromlosen Zug zum Stehen zu bringen? (siehe Abbildung) (1)

Lösungen

a) Die Zuladung von 27 t – 9 t = 18 t
wird bei 9 SUVs von je 2 t Gewicht erreicht. (2)



b) Die maximale Beschleunigung ist $a = \frac{F}{m} = \frac{10\,200\,N}{27\,000\,kg} \approx 0{,}38\ \frac{m}{s^2}$. (2)

c) Da die beiden Dreiecke ähnlich sind, gilt $\frac{1m}{100m} = \frac{F_h}{F_g}$ (1)

$\Rightarrow F_h \approx \frac{1}{100} \cdot F_g \approx \frac{1}{100} \cdot 27\,000\ kg \cdot 10\ \frac{N}{kg} = 2700\ N.$ (2)

Beschriftete Skizze: (3)

d) Die Beschleunigung ist $a = \frac{F}{m} = \frac{2700\,N}{27\,000\,kg} \approx 0{,}1\ \frac{m}{s^2}$. (1)

e)
$x_{Lok}(t) = x_{Zug}(t)$ (1)

$\frac{1}{2} \cdot 1{,}1 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot (t + 10)^2 + 100$ | ·2 und ausmulitplizieren (1)

$1{,}1 \cdot t^2 = 0{,}1t^2 + 2t + 10 + 200$ | $-1{,}1t^2$;·(−1) (1)

$0 = t^2 - 2t - 210$ | p-q-Formel (1)

$t_{1/2} = 1 \pm \sqrt{211}$ | nur die positive Lösung ist sinnvoll

$\Rightarrow$ Sie treffen sich nach $t = 1 \pm \sqrt{211} \approx 15{,}5$ Sekunden (1)

f) Die Lok hat in dieser Zeit eine Strecke von $s = \frac{1}{2} \cdot 1{,}1\ (15{,}5)^2 \approx 132{,}6$ m zurückgelegt. (1)

Der Zug hatte einen Vorsprung von 100 m und hat demnach 232,6 m zurückgelegt. (1)

g) Nach 15,5 Sekunden hat die Lok eine Geschwindigkeit von $v_{Lok} = a_{Lok} \cdot t = 1{,}1 \cdot 15{,}5 \approx 17\ \frac{m}{s} = 61{,}5\ \frac{km}{h}$ (1)

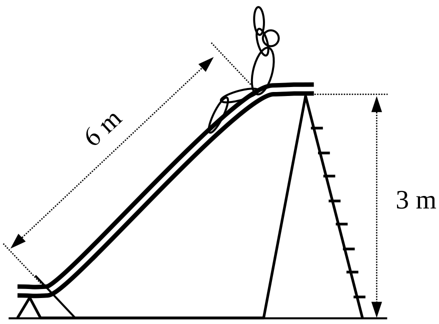
Der Zug ist schon 10 Sekunden länger unterwegs und dann $v_{Zug} = a_{Zug} \cdot t = 0{,}1 \cdot 25{,}5 \approx 2{,}6\ \frac{m}{s} = 9\ \frac{km}{h}$ schnell (1)

h) Da die Kupplung weg ist, muss er bei der nächsten Weiche überholen.
Bei den modernen Loks kann man nicht mehr auf die Plattform klettern und auf den Wagen springen. (1)

i) Die Fahrgäste können die auch in modernen Wagen vorhandene mechanische Handbremse betätigen. (1)

Aufgabe 7: Reibungskraft und schiefe Ebene (6)

Wie lange braucht man für die Fahrt auf der rechts abgebildeten Rutsche mit Gleitreibungszahl μ = 0,3 und wie schnell kommt man unten an?



Lösung (alles in SI)

Neigungswinkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 30°$ (1)

Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha) \cdot m \cdot g \approx 5 \cdot N$ (1)

Reibungskraft $F_R = \cos(\alpha) \cdot \mu \cdot m \cdot g \approx 2{,}6 \cdot N$ (1)

Beschleunigung $a = \frac{F_H - F_R}{m} = 2{,}4\ \frac{m}{s^2}$ (1)

Fahrstrecke 6 m = $s = \frac{1}{2} at^2 \Leftrightarrow$ Fahrzeit $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \approx \sqrt{5}$ s (1)

Endgeschwindigkeit $v = a \cdot t = 5{,}4$ m/s (1)

Aufgabe 8: Reibungskraft und schiefe Ebene (15)

Während Katzenmädchen Tina den beiden Rivalen scheinbar keinen Blick gönnt, weiß es Kater Hugo besser. Mit einem Kampfgewicht von 5 kg und einem sauberen Bodycheck wirft er seinen Konkurrenten Kurgar vom 12 m hohen Giebel der Scheune. Er selbst rutscht filmreif auf der um 40° geneigten mit Reibungsfaktor μ=0,3 schneebedeckten und bis zum Boden reichenden Dachschräge hinunter, um seinem Gegner unten den Rest zu geben. Kurgar landet aber sanft in einer Schneewehe…

a) Skizziere die schiefe Ebene mit Fahrtstrecke s, Gravitationskraft F_G , Hangabtriebskraft F_H, Normalkraft F_N und Reibungskraft F_R. (4)
b) Berechne die in a) genannten Größen. (6)
c) Wieviel Zeit hat Kurgar, um sich aus der Schneewehe freizukämpfen bevor Hugo den Boden erreicht? (3)
d) Berechne die Geschwindigkeit der Beiden beim Aufprall. (2)

Lösungen

a) Vollständig beschriftete Skizze (4)

b) Fahrweg $s = \dfrac{h}{\sin(\alpha)} \approx 18{,}7$ m (1)

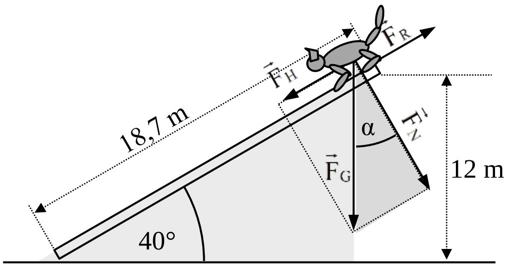
Gravitationskraft $F_G = mg \approx 50$ N (1)

Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha)\cdot F_G \approx 32{,}1$ N (1)

Normalkraft $F_N = \cos(\alpha)\cdot F_G \approx 38{,}3$ N (1)

Reibungskraft $F_R = \mu\cdot F_N \approx 11{,}5$ N (1)

Resultierende Kraft $F_{res} = F_H - F_R \approx 20{,}6$ N (1)



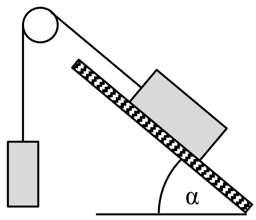
c) Beschleunigung $a = \dfrac{F_{res}}{m} \approx 4{,}1 \dfrac{m}{s^2}$ (1)

$s = \dfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ **Fahrzeit** $t_{Hugo} = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} \approx 3{,}0$ s und **Fallzeit** $t_{Kurgar} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \approx 1{,}5$ s (2)

d) **Aufprallgeschwindigkeiten** $v_{Hugo} = a\cdot t_{Hugo} \approx 12{,}3 \dfrac{m}{s}$ und $v_{Kurgar} = g\cdot t_{Kurgar} \approx 15 \dfrac{m}{s}$ (2)

Aufgabe 9a: Reibungskraft und schiefe Ebene (6)

Die beiden rechts abgebildeten Körper sind mit einem Seil über eine feste Rolle miteinander verbunden und erfahren infolge der Erdanziehung mit $g = 10$ m/s^2 eine Beschleunigung von 0,5 m/s^2. Der rechte Körper rutscht auf der um $\alpha = 40°$ geneigten Ebene nach unten und ist dreimal so schwer wie der linke. Berechne die Gleitreibungszahl μ für den rechten Körper.

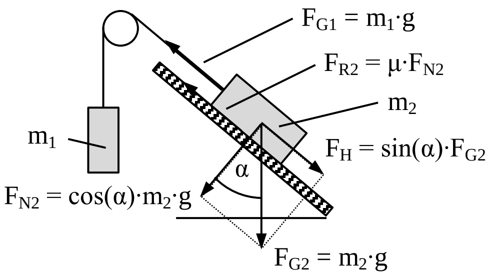


Lösung (alles in SI)

$F_{H2} - F_{R2} - F_{G1} = (m_1 + m_2)\cdot a$ (2)

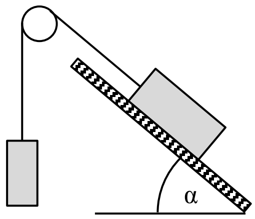
$\sin(\alpha)\cdot m_2\cdot g - \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot m_2\cdot g - m_1\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a$ (2)

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{\sin(\alpha)\cdot m_2\cdot g - m_1\cdot g - (m_1 + m_2)\cdot a}{\cos(\alpha)\cdot m_2\cdot g} = \frac{3\cdot\sin(\alpha)\cdot g - 1 - 4\cdot a}{3\cdot\cos(\alpha)\cdot g} \approx 0{,}31$$ (2)



Aufgabe 9b: Reibungskraft und schiefe Ebene (8)

Die beiden rechts abgebildeten Körper sind mit einem Seil über eine feste Rolle miteinander verbunden und gleich schwer. Der rechte Körper sitzt mit der Gleitreibungszahl $\mu = 0{,}4$ auf der um $\alpha = 30°$ geneigten Ebene. Bestimme die Bewegungsrichtung der Körper und berechne ihre Beschleunigung.



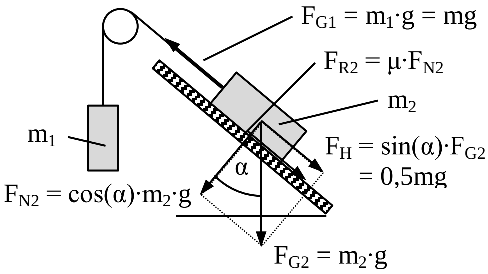
Lösung (alles in SI)

Die Zugkraft $F_{G1} = m\cdot g$ des linken Körpers ist größer als die Hangabtriebskraft $F_{H2} = 0{,}5\ m\cdot g$ des rechten Körpers. Der linke Körper zieht also den rechten Körper nach oben und die Reibungskraft F_{R2} widersetzt sich dieser Bewegung: (2)

$F_{G1} - F_{R2} - F_{H2} = (m_1 + m_2)\cdot a$ (2)

$m_1\cdot g - \mu\cdot\cos(\alpha)\cdot m_2\cdot g - \sin(\alpha)\cdot m_2\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a$ (2)

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m_1\cdot g - (\sin(\alpha) + \mu\cdot\cos(\alpha))\cdot m_2}{m_1 + m_2}\cdot g = \frac{1 - (\sin(\alpha) + \mu\cdot\cos(\alpha))}{2}\cdot g \approx \underline{0{,}77\ \text{m/s}^2}$$ (2)



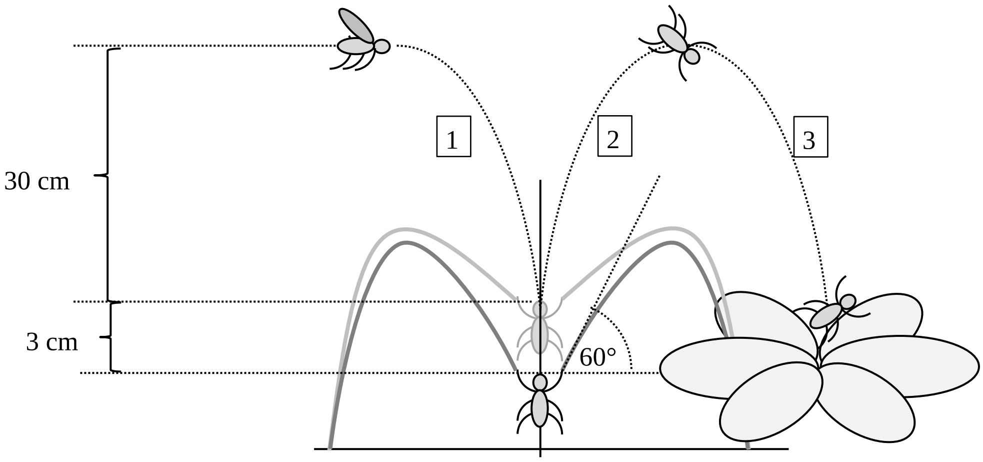
Aufgabe 10 Federenergie (15)

Der alte Maikäfer Edward wiegt mittlerweile schon 1 g und möchte endlich wieder schlanker werden. Er fühlt sich aber jung im Kopf und will es nochmal wissen, so wie früher:

Mit 1 m/s fliegt er auf zwei Grashalme zu, legt die Flügel an und lässt sich zwischen die beiden Halme fallen (Phase 1). Dann packt er die beiden Halme mit den Vorderklauen, schleudert sich wieder nach oben (Phase 2) und landet nach einem weiteren Fall (Phase 3) sanft auf dem Wegerich nebenan, so wie unten skizziert.

a) Berechne die Änderung seiner potentiellen Energie im Verlauf von Phase 1. (1)
b) Berechne seine resultierende Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt, in dem er nach den Halmen greift. (3)
c) Berechne die Federkonstante D der Halme. (2)
d) Warum haben alle drei Phasen genau die gleiche Dauer? (1)
e) Berechne die Dauer jeweils einer Phase. (2)
f) Berechne die Entfernung des Wegerichs von den Grashalmen, wenn die Landung präzise in seiner Mitte erfolgen soll. (2)
g) Berechne die Gesamtkraft auf Edwards Vorderklauen am tiefsten Punkt seiner Bahn. (2)
h) Berechne seine maximale Beschleunigung am tiefsten Punkt seiner Bahn und vergleiche mit der Erdbeschleunigung g = m/s^2 (2)

Rechne mit g = 10 N/kg.



Lösungen:

a) $\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 3$ mJ (1)

b) $\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin} \Leftrightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 \Rightarrow v_y = \sqrt{2gh} = \sqrt{6}\ \frac{m}{s} \Rightarrow v_{ges} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$ (3)

c) $\Delta E_{Feder} = \Delta E_{kin} = \Delta E_{pot} \Rightarrow \frac{1}{2} Ds^2 = \Delta E_{pot} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot \Delta E_{pot}}{s^2} = 6,\bar{6}$ N/m. (2)

d) Aufgrund der der Energieerhaltung ist die Wurfparabel symmetrisch, so dass Aufstieg und Abstieg immer die gleiche Dauer und die gleiche Weite haben (1)

e) Aus $h = \frac{1}{2} gt^2$ folgt die Fall- bzw. Steigzeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}24$ s (2)

f) Die horizontale Wegstrecke in den Phasen 2 und 3 ist $x = v_x \cdot 2t \approx 0{,}48$ m (2)

g) Die halbe Federkraft am untersten Punkt ist: $\frac{1}{2} F_D = \frac{1}{2} Ds = 50$ mN. (2)

h) $F_D - F_g = m \cdot a \Rightarrow$ Beschleunigung $a = \frac{F_D - F_g}{m} = \frac{0{,}1\,N - 0{,}01\,N}{0{,}001\,kg} = 90\,\frac{m}{s^2} = 9$ g (!) (2)

Aufgabe 11: Kreisbewegung (6)

a) Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω und die Geschwindigkeit v der Rotorspitzen eines Windrades mit einem Rotordurchmesser von 60 m, welches 1,5 Sekunden für eine Umdrehung braucht. (2)

b) Wie viele Umdrehungen pro Sekunde schaffen die 1 m großen Räder eines ICE bei 252 km/h? (2)

c) Wie schnell bewegt sich der 384 000 km entfernte Mond um die Erde, wenn er in 27,3 Tagen einen Umlauf schafft? (2)

Lösungen (6)

a) $f = 0,\overline{6}\ s^{-1}$; $\omega = 2\pi\cdot f = 1,\overline{3}\ \pi$ rad/s und $v = r\cdot\omega = 40\pi$ m/s ≈ 125,6 m/s ≈ 452,4 km/h (2)

b) Die Drehfrequenz ist $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{70}{2\pi\cdot 0,5}\ s^{-1} \approx 22,3$ Umdrehungen pro Sekunde (2)

c) Die Geschwindigkeit ist $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 384\,000\,000}{27,3\cdot 24\cdot 3600} \approx 1022,9\ \frac{m}{s}$.· (2)

Aufgabe 12: Zentripetalkraft und Energieerhaltung (4)

Eine Metallkugel wird an einem 60 cm langen Faden auf einem Kreis in einer vertikalen Ebene herumgeschleudert.

a) Zeige, dass die Geschwindigkeit v_0 am obersten Bahnpunkt $v_o \approx 2,43$ m/s betragen muss, damit der Faden sich gerade nicht mehr spannt. (1)

b) Welche Geschwindigkeit v_u hat die Kugel am untersten Bahnpunkt, wenn sie sich nur unter dem Einfluss der Schwerebeschleunigung $g \approx 10\ m/s^2$ weiterbewegt? (2)

c) Welche Geschwindigkeit v_u‘ muss die Kugel im untersten Bahnpunkt haben, damit die Fadenkraft das Sechsfache der Gewichtskraft der Kugel beträgt? (1)

Lösungen:

a) Im obersten Bahnpunkt muss gelten $F_g = F_z \Leftrightarrow m\cdot g\cdot = \frac{m\cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{r\cdot g} \approx 2,43$ m/s (1)

b) Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m v_u^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + m\cdot g\cdot 2r \Rightarrow v_u = \sqrt{v_o^2 + 2\cdot g\cdot 2r} = \sqrt{5\cdot r\cdot g} \approx 5,48$ m/s (1)

c) Im untersten Bahnpunkt muss gelten $5\ F_g = F_z \Leftrightarrow 5\cdot m\cdot g\cdot = \frac{m\cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{5\cdot r\cdot g} \approx 5,48$ m/s (1)

Aufgabe 13: Zentripetalkraft (3)

Wie schnell muss ein Wagen am obersten Punkt eines 20 m hohen Achterbahnloopings sein, wenn die Insassen an dieser Stelle gerade nicht aus ihren Sitzen fallen? Rechne mit $g = 10\ m/s^2$.

Lösung:

$F_Z = F_G \Leftrightarrow \frac{m v_o^2}{r} = mg \Rightarrow v_o = \sqrt{rg} = \sqrt{100} \approx 10\ \frac{m}{s}$. (3)

Aufgabe 14a: Zentripetal- und Reibungskraft (2)

Mit wie vielen km/h darf man auf einer Straße mit Haftreibungskoeffizient $\mu = 0,3$ in eine Kurve mit dem Radius r = 100 m fahren? Rechne mit $g = 10\ m/s^2$.

Lösung:

$F_r = F_z \Leftrightarrow \mu\cdot m\cdot g = \frac{m\cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mu\cdot r\cdot g} \approx 17,3$ m/s ≈ 62,4 km/h (2)

Aufgabe 14b: Zentripetal- und Reibungskraft (2)

Wie schnell darf ein Auto auf einer Strasse mit $\mu = 0,8$ in einer Kurve mit r = 50 m höchstens fahren?

Lösung:

$F_Z = F_R \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r} = \mu\cdot m\cdot g \Rightarrow v = \sqrt{\mu\cdot r\cdot g} = 20$ m/s

Aufgabe 15: Zentripetalkraft und Kräftezerlegung(12)

a) Wie schnell müsste ein Wagen am obersten Punkt eines 20 m hohen Achterbahnloopings sein, wenn die Insassen an dieser Stelle noch mit ihrer halben Gewichtskraft in die Sitze gedrückt werden sollen? Rechne mit $g = 10\ m/s^2$. (2)
b) Wie schnell ist der Wagen dann am untersten Punkt? (2)
c) Mit welcher Kraft werden die Insassen am untersten Punkt in ihre Sitze gedrückt? (2)
d) Zeige, dass die Geschwindigkeit auf halber Höhe ca. 18,71 m/s beträgt. (2)
e) In welchem Winkel α zur Horizontalen wirkt die resultierende Kraft auf halber Höhe? (2)
f) Bei Beschleunigungen von über 5g tritt infolge mangelnder Durchblutung des Sehnervs zunächst eine Einengung des Sehfeldes und dann innerhalb weniger Sekunden Bewusstlosigkeit ein, die aber nur für die Dauer der Beschleunigung anhält. Achterbahnen werden daher zugelassen, wenn die Beschleunigung nur eine Sekunde lang über dem Grenzwert liegt. Gib unter Verwendung des Ergebnisses aus d) eine begründete Abschätzung der Fahrtdauer durch die untere Hälfte des Loopings an?

Lösungen (12):

a) $F_Z = \frac{3}{2} F_G \Leftrightarrow \frac{m v_o^2}{r} = \frac{3mg}{2} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{3 \cdot r \cdot g}{2}} = \sqrt{150} \approx 12{,}25\ \frac{m}{s}$. (2)

b) Energie: $E_{pot} + E_{kin} = E_{pot}' + E_{kin}' \Leftrightarrow mg \cdot 2r + \frac{1}{2} m v_o^2 = 0 + \frac{1}{2} m v_u^2 \Leftrightarrow 2rg + \frac{3rg}{4} = \frac{1}{2} v_u^2 \Rightarrow v_u = \sqrt{\frac{11rg}{2}} \approx 23{,}45\ \frac{m}{s}$. (2)

c) $F_Z + F_G = \frac{m v_u^2}{r} + mg = 5{,}5mg + mg = 6{,}5mg \Rightarrow$ mit dem sechseinhalbfachen ihrer Gewichtskraft! (2)

d) Auf halber Höhe ist die Geschwindigkeit $v_{1/2} = \sqrt{\frac{7rg}{2}} \approx 18{,}71\ \frac{m}{s}$ (2)

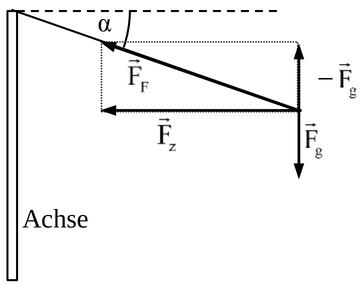
e) Aus d) folgt $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_G}{F_Z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{mg}{3{,}5\ mg}\right) \approx 15{,}94°$ (2)

f) Aus d) folgt $\Delta t < \frac{\pi r}{v_{1/2}} \approx 1{,}68\ s$ (2)

Aufgabe 16: Zentripetalkraft und Kräftezerlegung (5)

Ein 250 g schwerer Körper wird an einem Faden um eine vertikale Achse auf einem horizontal liegenden Kreis mit dem Radius r = 1 m herumgeschleudert. In 10 Sekunden führt der Körper 5 Umläufe aus.

a) Berechne den Betrag der erforderlichen Zentripetalkraft $\vec{F}_z$. (2)
b) Berechne den Betrag der Fadenkraft $\vec{F}_F$. (2)
c) Berechne den Winkel, den der Faden mit der Horizontalen einschließt. (1)



Lösungen (5)

a) $F_z = m\omega^2 r = \frac{\pi^2}{4}\ N \approx 2{,}47\ N$ (2)

b) $F_F = \sqrt{F_g^2 + F_z^2} \approx \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}47^2} \approx 3{,}52\ N$ (2)

c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_g}{F_z}\right) \approx 45{,}3°$ (1)

Aufgabe 17: Zentripetalkraft und Kräftezerlegung (5)

Ein Körper wird wie an einem 80 cm langen Faden um eine senkrechte Achse geschleudert, so dass er in drei Sekunden zwei Umläufe ausführt. Berechne den Neigungswinkel α des Fadens zur Horizontalen und den Radius r der Umlaufbahn.

Lösungen

$\tan(\alpha) = \frac{F_G}{F_Z} = \frac{m \cdot g}{m \cdot \omega^2 \cdot r} = \frac{g}{\omega^2 \cdot r} = \frac{g}{\omega^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot s}$ (2)

und mit $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ erhält man $\sin(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 \cdot s} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 \cdot s}\right) \approx 45{,}4°$. (2)

Der Radius der Umlaufbahn ist $r = \cos(\alpha) \cdot s = 56{,}1$ cm. (1)

Aufgabe 18: Kreisbewegungen und waagrechter Wurf (7)

Auf dem Rand einer ebenen, runden, 1,25 m über dem Boden an einer vertikalen Achse drehbar gelagerten 50 cm großen Scheibe eines Drehschemels liegt ein Holzklotz mit Haftreibungskoeffizient $\mu = 0{,}3$. Rechne mit $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) Bei wie vielen Umdrehungen pro Sekunde fliegt der Klotz vom Schemel? (2)
b) Welchen Weg legt der Klotz in horizontaler Richtung zurück, bevor er auf dem Boden aufschlägt? (3)
c) In welcher Entfernung von der Drehachse schlägt er auf dem Boden auf? (2)

Lösungen

a) $F_r = F_z \Leftrightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \omega^2 \cdot r \Leftrightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{\mu \cdot g}{r}} \approx 0{,}55\ \mathrm{s^{-1}}$ (2)

b) Die Flugdauer ergibt sich mit $h = \dfrac{1}{2} g t^2$ zu $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}5$ s. (1)

Die Abfluggeschwindigkeit ist $v = \omega r = \sqrt{\mu \cdot r \cdot g} \approx 0{,}87$ m/s (1)

Die waagrecht zurückgelegte Strecke ist $s = v \cdot t = \sqrt{2h \cdot \mu \cdot r} \approx 43{,}3$ cm (1)

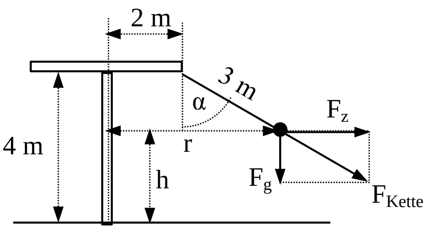
c) Die Entfernung zur Drehachse ist $d = \sqrt{s^2 + r^2} = 50$ cm. (1)

Aufgabe 19: Kräftezerlegung bei Kreisbewegung (8)

Ein Kettenkarussell besteht aus einer 4 m breiten Scheibe, die sich um eine senkrechte Achse 4 m über dem Boden im Kreis dreht. Die 10 kg schweren Sitze hängen an 3 m langen Ketten.

a) Skizziere die Anordnung und berechne den Abstand h der Sitze vom Boden. (3)
b) Berechne den Abstand r der Sitze von der Drehachse und die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn das Karussell sich so schnell dreht, dass die Ketten um $\alpha = 60°$ gegen die Senkrechte ausgelenkt sind. (3)
c) Wie groß ist die Kraft auf die Kette, wenn eine 50 kg schwere Person mitfährt? (2)

Lösung:



a) Beschriftete Skizze (2)
$h = 4\ \mathrm{m} - 3\ \mathrm{m} \cdot \cos(\alpha) = 2{,}5$ m. (1)

b) $r = 2\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{m} \cdot \sin(\alpha) = \left(2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)\ \mathrm{m} \approx 4{,}6$ m (1)

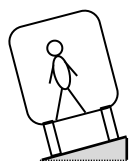
$\tan(\alpha) = \dfrac{F_z}{F_g} = \dfrac{m\omega^2 r}{mg} = \dfrac{\omega^2 r}{g}$ (1)

$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{g \cdot \tan(\alpha)}{r}} = \sqrt{\dfrac{10 \cdot \sqrt{3}}{2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}}}\ \mathrm{s^{-1}} \approx 1{,}94\ \mathrm{s^{-1}}$. (1)

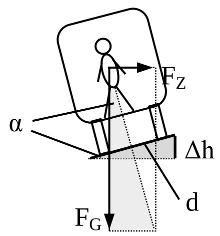
c) $F_{Kette} = \sqrt{F_g^2 + F_z^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + \left(\omega^2 r\right)^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + \left(g \cdot \tan(\alpha)\right)^2} = mg\sqrt{1 + (\tan(\alpha))^2} = 2mg \approx 1200$ N (2)

Aufgabe 20a: Kräftezerlegung bei Kreisbewegung (5)

a) Welche Kurvenneigung α muss eine für 108 km/h ausgelegte Eisenbahnstrecke mit Krümmungsradius r = 800 m haben, wenn die Passagiere keine Zentrifugalkraft quer zur Fahrtrichtung empfinden sollen? Vervollständige und beschrifte die Skizze; rechne mit g = 10 N/kg.
b) Um wie viele cm muss das Außengleis höher liegen als das Innengleis, wenn es die Normalspurweite nach George Stephenson (Stockton-Darlington 1830) von 4 Fuß 8,5 Zoll = 1,435 m haben soll?



Lösung:



a) Skizze (2)

$\alpha = \arctan^{-1}\left(\dfrac{F_Z}{F_G}\right) = \arctan^{-1}\left(\dfrac{v^2}{r \cdot g}\right) \approx 6{,}42°$ (2)

b) $\Delta h = d \cdot \sin(\alpha) = 16{,}04$ cm. (1)

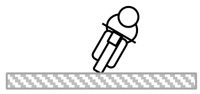
Aufgabe 20b: Kräftezerlegung bei Kreisbewegung (2)
Um welchen Winkel müssen die Bahngleise in einer Kurve mit r = 900 m bei 108 km/h nach innen geneigt sein?

Lösung:

$\alpha = \arctan\left(\frac{F_Z}{F_G}\right) = \arctan\left(\frac{v^2}{r \cdot g}\right) = \arctan(0{,}1) \approx 5{,}7°$ (2)

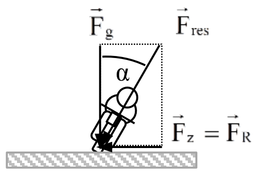
Aufgabe 21a: Kräftezerlegung und Reibung bei Kreisbewegungen (5)
Der abgebildete 80 kg schwere Motorradfahrer will mit seinem 60 kg schweren Motorrad auf einer waagrechten Straße mit Haftreibungskoeffizient $\mu = 0{,}3$ in eine Kurve mit dem Radius r = 100 m fahren. Rechne mit $g = 10\ m/s^2$.

a) Zeichne die Reibungskraft $\vec{F}_R$, die Gravitationskraft $\vec{F}_g$ und die Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$ in die Skizze rechts ein. (1)
b) Mit wie vielen km/h darf er höchstens in die Kurve fahren? (2)
c) Um welchen Winkel α neigt er sich dabei zur Senkrechten? (1)
d) Wie groß ist die resultierende Kraft F_{res} auf die Reifen? (1)



Lösung:

a) Kraftpfeile: (1)



b) $F_R = \mu \cdot F_g = F_z \Leftrightarrow \mu \cdot m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\mu \cdot r \cdot g} \approx 17{,}3\ \frac{m}{s} \approx 62{,}4\ \frac{km}{h}$ (2)

c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_Z}{F_g}\right) = \tan^{-1}(\mu) \approx 16{,}7°$ (1)

d) Resultierende Kraft $F_{res} = \sqrt{F_g^2 + F_Z^2} = mg\sqrt{1+\mu^2} \approx 146{,}2\ N$ (1)

Aufgabe 21b (Kräftezerlegung und Reibung bei Kreisbewegung (2)
Um welchen Winkel neigt sich ein Motorradfahrer in einer Kurve mit r = 100 m bei 72 km/h zur Seite?

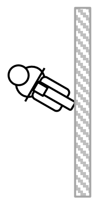
Lösung:

$\alpha = \arctan\left(\frac{F_Z}{F_G}\right) = \arctan\left(\frac{v^2}{r \cdot g}\right) = \arctan(0{,}1) \approx 5{,}7°$ (2)

Aufgabe 22: Kräftezerlegung und Reibung bei Kreisbewegungen (8)
Bei einer Motorradshow fährt ein 80 kg schwerer Steilwandfahrer mit einem 60 kg schweren Motorrad auf der Innenseite eines vertikalen Zylinders mit dem Radius 4 m im Kreis herum.

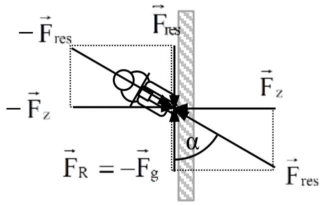
a) Zeichne die Reibungskraft $\vec{F}_R$, die Gravitationskraft $\vec{F}_G$, die Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$ und die Zentrifugalkraft $-\vec{F}_Z$ in die Skizze rechts ein. In welchem System befinden wir uns jetzt? (2)
b) Wie schnell muss er mindestens fahren, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Reifen und Wand $\mu = 0{,}625$ beträgt? (2)
c) In welchem Winkel α ist er dann zur vertikalen Wand geneigt? (2)
d) Wie groß ist die resultierende Kraft F_{res} auf die Räder der Maschine? (2)

Rechne mit $g = 10\ m/s^2$.



Lösung:

a) Kraftpfeile im beschleunigten System des Fahrers: (2)



b) $F_g = F_R = \mu \cdot F_Z \Leftrightarrow g = \mu \cdot \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot r}{\mu}} = 8\ m/s = 28{,}8\ km/h$ (2)

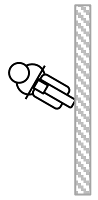
c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_Z}{F_g}\right) = \tan^{-1}(\mu) \approx 32°$ (2)

d) Resultierende Kraft $F_{res} = \sqrt{F_g^2 + F_Z^2} = mg\sqrt{1+\frac{1}{\mu^2}} \approx 2{,}64\ kN$ (2)

Aufgabe 23: Kräftezerlegung, Reibung und waagrechter Wurf bei Kreisbewegungen (10)

Bei einer Motorradshow fährt ein Steilwandfahrer auf einem Motorrad mit 1 m großen Rädern auf der Innenseite eines vertikalen Zylinders mit dem Radius 10 m auf einer Höhe von 5 m über dem Boden im Kreis herum.

a) Wie schnell muss er mindestens fahren, wenn der Reibungskoeffizient zwischen Reifen und Wand $\mu = 1$ beträgt? (2)
b) Wie schnell drehen sich die Räder dabei? (2)
c) In welchem Winkel α ist er dann zur vertikalen Wand geneigt? (2)
d) Wie weit von der Steilwand entfernt landet ein Fuchsschwanz (ein Glücksbringer), der sich vom Lenker des Motorrades gelöst hat und aus 5 m Höhe geradeaus weiterfliegt? (4)



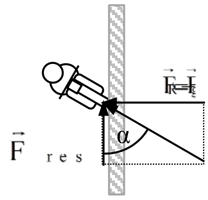
Rechne mit $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Lösungen:

a) $F_g = F_R = \mu \cdot F_Z \Leftrightarrow g = \mu \cdot \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g \cdot r}{\mu}} = 10\ \text{m/s} = 36\ \text{km/h}$ (2)

b) $n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{10}{\pi}\ \text{s}^{-1} = \frac{600}{\pi}\ \text{min}^{-1} = 191$ Umdrehungen pro Minute. (2)

c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_Z}{F_g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 45°$ (2)



d) Flugdauer $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1\ \text{s}$ (1)

Flugweite $s = v \cdot t = 10\ \text{m}$ (1)

Entfernung von der Steilwand $d = \frac{s}{\sqrt{2}} \approx 7{,}07\ \text{m}$ (2)

Aufgabe 24: Coriolis-Beschleunigung

Anna hat auf dem Spielplatz eine Drehscheibe entdeckt und geht nun 1 m von der Drehachse entfernt mit 3,6 km/h im Kreis. Da sich die Drehscheibe unter ihr aber in die Gegenrichtung dreht, tritt sie von aussen gesehen auf der Stelle. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Scheibe? Anna will aufhören und zum 2 m von der Drehachse entfernten Rand gehen. Auf welche Geschwindigkeit muss sie jetzt beschleunigen? Aber je mehr sie beschleunigt, desto schneller wird auch die Scheibe. Hilfe! Kannst du das mit einem einfachen physikalischen Begriff erklären? Denke an einen leichten fahrenden Wagen (Skateboard), von dem man gegen die Fahrtrichtung herunter springen will.

Lösungen:

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \frac{v}{r} = 1\ \text{s}^{-1}$.

Sie muss auf die Tangentialgeschwindigkeit $\omega \cdot 2r = 2\ \text{m/s}$ beschleunigen, wenn sie die Scheibe noch nicht verlassen will.

Möchte sie sich aber weiter radial von der Drehachse wegbewegen, ohne gegenüber dem Boden abgelenkt zu werden, so müsste sie zur Beibehaltung der ortsfesten geraden Bewegungsrichtung noch stärker tangential beschleunigen; z.B. bei einer Radialgeschwindigkeit von $v_r = 1\ \text{m/s}$ auf $\omega \cdot 4r = 4\ \text{m/s}$.

Aufgabe 25: Coriolis-Beschleunigung (2)

Erkläre mit Hilfe der Coriolisbeschleunigung und einer Skizze, warum sich Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel immer gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Lösungen: (2)

Von einem Punkt über dem Nordpol betrachtet dreht sich die Erde gegen den Uhrzeigersinn von Westen nach Osten. Die von Süden bzw. Außen kommenden Luftmassen haben eine große Tangentialgeschwindigkeit und überholen auf ihrem Weg nach Norden bzw. Innen die dortigen Luftmassen in Drehrichtung der Erde nach Osten. Die von Norden bzw. Innen kommenden Luftmassen haben eine geringe Tangentialgeschwindigkeit und fallen auf ihrem Weg nach Süden bzw. Außen gegen die Drehrichtung nach Westen zurück. Damit ergibt sich eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn.