1.4. Dynamik der Massenpunkte

1.4.1. Die Newtonschen Axiome

esacast professor pavia on the law of inertia

1. Newtonsches Axiom (Trägheitssatz)
Ist die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper Null, so bleibt er in Ruhe oder im Zustand der gleichförmigen Bewegung

esacast professor pavia on force, mass and acceleration

2. Newtonsches Axiom (Masse und Beschleunigung)

Ist $\vec{F}$ die Summe aller Kräfte auf **einen** Körper der Masse m, so ändert er seine Bewegung mit der Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

esacast professor pavia on action and reaction

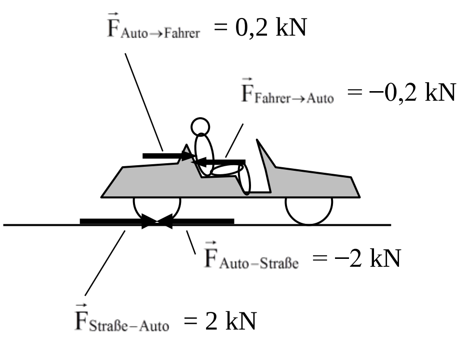
3. Newtonsches Axiom (actio = reactio)
Wenn ein Körper A auf einen Körper B die Kraft $\vec{F_A}$ ausübt, so übt B auf A die entgegengesetzt gleiche Kraft $\vec{F_B} = -\vec{F_A}$ aus.

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 1 - 7

Inertialsysteme
Die ersten beiden Newtonschen Axiome gelten auch in bewegten Systemen wie z.B. der Planeten, Schiffen, Flugzeugen und Zügen, solange diese sich geradlinig gleichförmig bewegen. Solche Systeme heißen **Inertialsysteme** (lat inertia = Trägheit), da in ihnen das Trägheitsprinzip gilt. **Nichtinertialsysteme** wie z.B. ein bremsender oder in die Kurve fahrender Zug erfüllen nicht die Newtonschen Axiome, denn infolge der Bewegungsänderung des gesamten Bezugssystems treten unvermutete **Scheinkräfte** auf, die innerhalb des Bezugssystems nicht auf die Wirkung anderer Körper zurückzuführen sind. Die bekanntesten Scheinkräfte sind **Brems-, Beschleunigungs- und insbesondere Fliehkräfte** bei Drehbewegungen. Wenn man ihre Ursache in Form der Beschleunigung $\vec{a}$ des Bezugssystems kennt, kann man sie wie gewohnt mit $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ berechnen. Man muss aber darauf achten, dass sich die **Beschleunigung** $\vec{a}$ nicht auf den Körper mit der Masse m relativ zum Bezugssystem, sondern auf das **komplette Bezugssystem selbst** bezieht. Die Betrachtung von beschleunigten Nichtinertialsystemen ist in vertrauten **Alltagssituationen** problemlos möglich, solange man Richtungen und Beträge aller Kräfte und Beschleunigungen aus **Erfahrung** einschätzen kann. In unvertrauten Situationen wie z.B. bei der Bewegung von Elementarteilchen oder Himmelskörpern dagegen sollten nur Inertialsysteme verwendet werden! Einzig das 3. Newtonsche Axiom gilt auch in Nichtinertialsystemen.

Beispiel:
Ein 100 kg schwerer Mann sitzt in einem 900 kg schweren Sportwagen und beschleunigt mit 2 m/s². Bei den folgenden Betrachtungen lassen wir die senkrecht wirkende Schwerkraft unberücksichtigt und beschränken uns auf Kräfte und Beschleunigungen in horizontaler Richtung.

a) Welche Kraft übt das Auto auf die Straße aus?
b) Welche Kraft übt die Straße auf das Auto aus?
c) Welche Kraft übt der Sitz auf den Fahrer aus?
d) Welche Kraft übt der Fahrer auf den Sitz aus?
e) Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer in Bezug auf das System des Autos?
f) Welche Beschleunigung erfährt der Fahrer in Bezug auf das System der Straße?



Lösungen:
a) - d): siehe Skizze.

e) In Bezug auf das Auto ist a = 0, obwohl der Sitz eine Kraft von $\vec{F}_{Auto\to Fahrer} = +0,2$ kN auf den Fahrer ausübt. Die Gegenkraft $\vec{F}_{Fahrer\to Auto} = -0,2$ kN ist eine **Scheinkraft**, die aus der Beschleunigung des Fahrers in Bezug auf die Straße herrührt. Im System Auto herrscht Gleichgewicht und der Fahrer bleibt in Ruhe: $\vec{F}_{Auto\to Fahrer} + \vec{F}_{Fahrer\to Auto} = 0$ und $\vec{a}_{Mann} = 0$.

f) Im System Straße herrscht kein Gleichgewicht und der Fahrer wird gemeinsam mit dem Auto beschleunigt $\vec{a}_{Fahrer} = 2$ m/s² und $\vec{F}_{Auto\to Fahrer} = m_{Fahrer} \cdot \vec{a}_{Fahrer} = 0,2$ kN

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 8 - 10

1.4.2. Die gleichförmige Kreisbewegung

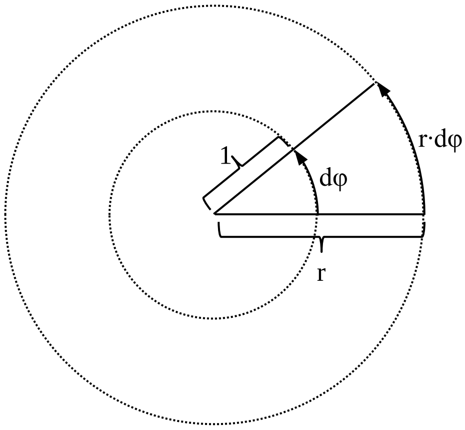
Für die Beschreibung von Kreisbewegungen sind die folgenden Größen in Gebrauch:

Drehzahl oder **Frequenz** = Umdrehungen pro Zeit

$$f = \frac{dn}{dt} \qquad \text{mit} \qquad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hertz Hz}$$

Winkelgeschwindigkeit = Bogenmaß pro Zeit
= Bogenlänge auf dem Einheitskreis pro Zeit
= Geschwindigkeit auf dem Einheitskreis

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi \cdot dn}{dt} = 2\pi f \qquad \text{mit } [\omega] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$$



Tangentialgeschwindigkeit = Bogenlänge auf dem Kreis mit Radius r pro Zeit

$$v_t = \frac{r \cdot d\phi}{dt} = \omega r \qquad \text{mit } [v_t] = \frac{m}{s}$$

Radialgeschwindigkeit = Radiusänderung pro Zeit

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

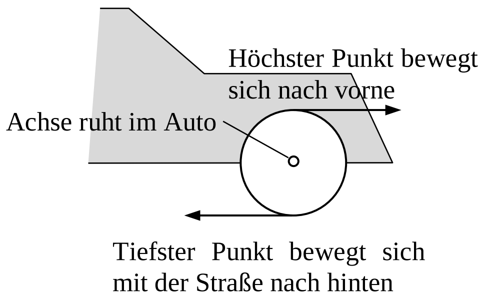
Bei der **gleichförmigen Kreisbewegung** auf konstanten Radius, ist $v_r = 0$ und man bezeichnet die Tangentialgeschwindigkeit einfach als **Geschwindigkeit v**.

Beispiel:

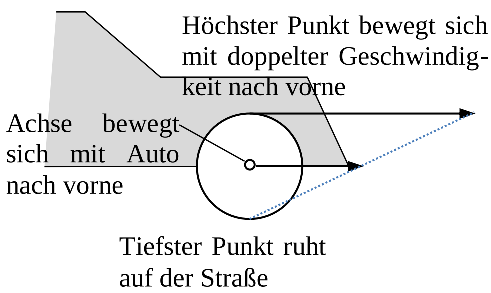
a) Berechne Drehfrequenz und Winkelgeschwindigkeit der 80 cm hohen Räder eines 72 km/h schnellen Autos.
b) Berechne die Geschwindigkeiten des höchsten und es tiefsten Punktes der Reifen im Bezugssystem des fahrenden Autos.
c) Bestimme die Geschwindigkeiten aus b) im Bezugssystem der Straße.

Lösungen:

a) Geschwindigkeit v = 72 km/h = 20 m/s. Der Umfang $u = \pi \cdot d \approx 2{,}51$ m muss also pro Sekunde $\frac{20\text{ m}}{2{,}51\text{ m}} \approx 7{,}96$ mal pro Sekunde abgerollt werden. Die Drehfrequenz ist also $f = \frac{v}{u} \approx 7{,}96\ \frac{1}{s}$ und die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega = \frac{v}{f} = 50\ \frac{1}{s}$.



b) Im achsfesten System ist $v_{oben} = \omega r = 50\frac{1}{s} \cdot (+0{,}4\text{ m}) = +20\frac{m}{s}$, $v_{Achse} = 0\frac{m}{s}$ und $v_{unten} = \omega r = 50\frac{1}{s} \cdot (-0{,}4\text{ m}) = -20\frac{m}{s}$. (siehe Abb.)



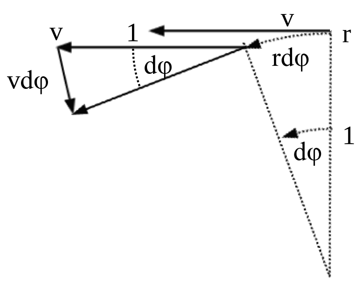
c) Im straßenfesten System ist $v_{oben} = \omega r = 50\frac{1}{s} \cdot 0{,}8\text{ m} = 40\frac{m}{s}$, $v_{Achse} = \omega r = 50\frac{1}{s} \cdot 0{,}4\text{ m} = 20\frac{m}{s}$ und $v_{unten} = 0\frac{m}{s}$. (siehe Abb.)

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 11 - 12

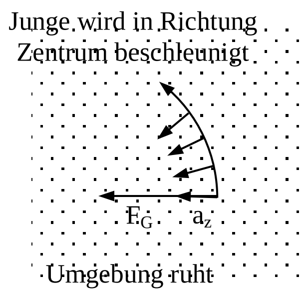
1.4.3. Die Zentripetalbeschleunigung

Um einen mit der Geschwindigkeit v geradeaus fliegenden Körper der Masse m auf eine Kreisbahn mit Radius r zu zwingen, muss er für jeden überstrichenen Winkelabschnitt dφ um die Geschwindigkeit dv = v·dφ in Richtung Zentrum beschleunigt werden. Die dazu notwendige **Zentripetalbeschleunigung** a_z (lat. petere = streben nach) ist also

$$a_z = \frac{dv}{dt}$$
$$= \frac{v \cdot d\phi}{dt}$$
$$= v \cdot \omega \quad \text{mit der Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{d\phi}{dt}$$
$$= \frac{v^2}{r} \quad \text{wegen } v = \omega \cdot r$$



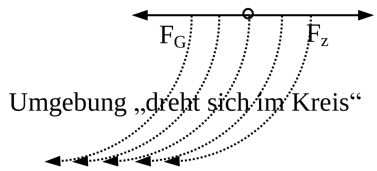
Die entsprechende **Zentripetalkraft** $F_z = ma_z = m \cdot v \cdot \omega = \frac{mv^2}{r}$ ist ebenfalls nach innen gerichtet und bewirkt die Beschleunigung nach innen in die Richtung des Kurvenzentrums. Im beschleunigten **Nichtinertialsystem** z.B. eines fensterlosen Zuges wird die Kurve aber gar nicht registriert. Da die deutlich fühlbare Zentripetalkraft der Wand oder des Sitzpolsters im Nichtinertialsystem des Zuges keine Bewegungsänderung zur Folge hat, herrscht **Kräftegleichgewicht** zwischen der **nach innen gerichteten Zentripetalkraft** mit der gleich großen, **nach außen gerichteten Zentrifugalkraft**. Da diese Kraft z.B. im plötzlich in die Kurve fahrenden Zug scheinbar keine Ursache hat und nur in beschleunigten Systemen auftritt, wird sie als **Scheinkraft** bezeichnet. In **vertrauten Alltagssituationen mit gleichförmigen Kreisbewegungen** kann durchaus die Zentrifugalkraft im Nichtinertialsystem des kreisenden Körpers verwendet werden, bei komplizierteren Bewegungen ist dringend davon abzuraten!



Beispiel:
Auf einem Spielplatz hat sich ein 20 kg schwerer Junge auf einer 4 m grossen Drehscheibe in Schwung gebracht, dass er alle zwei Sekunden eine Umdrehung schafft. Mit welcher Kraft wird er gegen das Geländer gedrückt, wenn er ganz am Rand steht?

Im **Inertialsystem** des außenstehenden Beobachters wird der Junge ständig nach innen beschleunigt. Mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi\ s^{-1}$ erhält man die **Zentripetalbeschleunigung** $a_z = \omega^2 r = 2\pi^2\ m/s^2$ und nach dem **2. Newtonschen Axiom** die Geländerkraft $F_G = ma_z = 40\ \pi^2 = 394{,}8$ N.

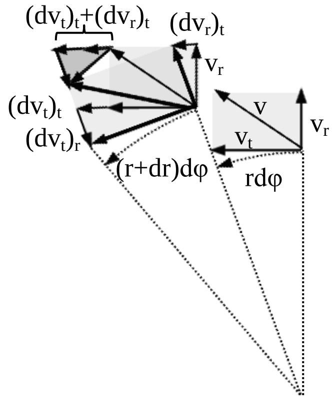
Junge steht im „Kräftegleichgewicht“



Im **beschleunigten Nicht-Inertialsystem** des Jungen dreht sich die Umgebung um ihn im Kreis, während er selbst ruht.. Es herrscht also Kräftegleichgewicht und nach dem **3. Newtonschen Axiom** ist die **Zentrifugalkraft** $F_z = + 197{,}4$ N (Berechnung siehe oben) entgegengesetzt gleich der Geländerkraft $F_G = -197{,}4$ N.

Übungen. Aufgaben zur Dynamik Nr. 13 - 19

1.4.4. Die Coriolis-Beschleunigung



Möchte man sich auf einer mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ drehenden Scheibe vom Zentrum aus radial mit der Geschwindigkeit $v_r = \frac{dr}{dt}$ nach außen bewegen, so muss man dazu in drei Schritten die Geschwindigkeit ändern: (dunkles Dreieck)

1. Die **Tangentialgeschwindigkeit** $v_t = \omega r$ nimmt in der Zeit dt in **tangentialer** Richtung um $(dv_t)_t = \omega \cdot dr$ zu.
2. Infolge der Kurvenkrümmung ändert sie aber auch ihre Richtung **radial** um den Betrag $(dv_t)_r = \omega r \cdot d\varphi$.
3. Umgekehrt ändert sich die Richtung der **Radialgeschwindigkeit tangential** um den Betrag $(dv_r)_t = v \cdot d\varphi$.
4. Da die radiale Bewegung im rotierenden Bezugssystem gleichförmig sein soll, ist $(dv_r)_r = 0$.

In tangentialer Richtung erhält man die **Coriolisbeschleunigung**

$$a_t = \frac{(dv)_t}{dt} = \frac{(dv_t)_t}{dt} + \frac{(dv_r)_t}{dt} = \omega \cdot \frac{dr}{dt} + v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega v + \omega v = 2\,\omega v.$$

In radialer Richtung erhält man wieder die **Zentripetalbeschleunigung**

$$a_r = \frac{(dv_t)_r}{dt} = \omega r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 r.$$

In der Skizze ist $dt \approx 1$ und damit $v_r \approx dr$ sowie $v_t \approx rd\varphi$.

Übungen: Aufgaben zur Dynamik Nr. 20 und 21