

## 1.7. Aufgaben zur Drehimpulserhaltung

### Aufgabe 1: Drehimpuls

Eine 30 g schwere Kugel wird an einem 20 cm langen Faden zweimal pro Sekunde im Kreis herumgeschleudert.

- Berechne die Bahngeschwindigkeit und den Bahndrehimpuls der Kugel.
- Der Faden wird auf 10 cm verkürzt. Wie schnell ist die Kugel und wie viele Umläufe pro Sekunde schafft sie jetzt?

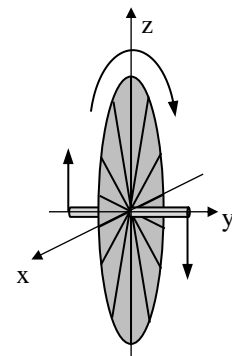
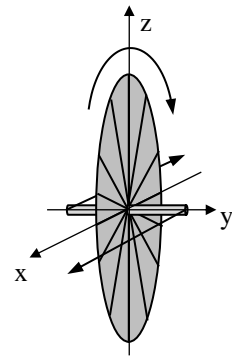
### Aufgabe 2: Drehimpuls

Jesse und Anton fahren auf ihren Fahrrädern mit 36 km/h nebeneinander her. Anton hat ein Tourenrad mit 980 g schweren und 70 cm großen 28-Zoll-Felgen; Jesse dagegen ein Mountainbike mit 910 g schweren und 65 cm großen 26-Zoll-Felge. Berechne jeweils die Drehimpulse der Felgen. Wer braucht mehr Kraft zum Lenken und wer kann besser freihändig fahren?

### Aufgabe 3: Drehimpuls

Frank hat eine 980 g schweren und 70 cm großen 28-Zoll-Fahrradfelge ausgebaut und hält sie nun mit beiden Händen an der Achse so vor sich, dass diese auf der y-Achse liegt (siehe rechts). Mit dem Daumen greift er in 4 cm Abstand zur Achse in die Speichen und bringt die Felge in 5 Sekunden so in Schwung, dass sie 3 Umdrehungen pro Sekunde schafft.

- Wie groß ist der Drehimpuls der Felge?
- Wie groß war das erforderliche Drehmoment, wenn man gleichmässige Beschleunigung voraussetzt?
- Welche Kraft hat der Daumen auf die Speichen ausgeübt?
- Frank will nun die wie skizziert rotierende Felge mit leichtem Zug der rechten Hand bzw. Druck der linken Hand um die senkrechte z-Achse nach rechts schwenken. Die Felge kippt aber stattdessen um die x-Achse nach unten. Zeichne die Richtung des Drehimpulses  $\vec{L}$  sowie des durch die Hände



ausgeübten Drehmomentes  $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$  in die Skizze ein und begründe durch

- grafische Vektoraddition, wie es zu dieser unerwarteten Reaktion kommt.
- Jetzt nimmt Frank die rechte Hand weg und balanciert die rotierende Felge nur noch auf der linken Seite. Doch statt wie erwartet um die x-Achse nach unten zu kippen, fängt sie an, sich langsam um die z-Achse zu drehen. Zeichne wieder die Richtung des Drehimpulses  $\vec{L}$  sowie des durch die Schwerkraft ausgeübten Drehmomentes  $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$  in die Skizze ein und begründe durch grafische

Vektoraddition, wie es zu dieser unerwarteten Reaktion kommt

### Allgemeine Angaben zu den Aufgaben 4 – 9 (Keplersche Gesetze):

- Eine **Astronomische Einheit** 1 AE =  $1,496 \cdot 10^8$  km ist die mittlere Entfernung der Erde zur Sonne.
- Der **Erdradius** ist 6370 km.
- Die Umlaufdauer der Erde um die Sonne ist ein **Jahr** = 1 a = 365,25 Tage.
- Die Umlaufdauer des Mondes um die Erde ist 27,3 Tage.

### Aufgabe 4: Keplersche Gesetze

- Welche Umlaufdauer hat ein geostationärer Satellit, der sich immer über demselben Ort auf der Erde befindet?
- Wo muss die Umlaufbahn eines geostationären Satelliten liegen?
- Nennen Sie zwei Anwendungen für geostationäre Satelliten.
- Der mittlere Abstand des Mondmittelpunktes zum Erdmittelpunkt ist  $3,844 \cdot 10^5$  km. Berechnen Sie daraus den Abstand, den ein geostationärer Satellit von der Erdoberfläche haben muss.

### Aufgabe 5: Keplersche Gesetze

- Berechnen Sie die Umlaufdauer des Mars aus seinem mittleren Bahnradius von  $r' = 1,52$  AE.
- Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeiten von Erde und Mars in km/h

### Aufgabe 6: Keplersche Gesetze

Im Perigäum hat der Mond seinen kleinsten Abstand von  $3,57 \cdot 10^5$  km und im Apogäum seinen größten Abstand von  $4,07 \cdot 10^5$  km zur Erde.

- Berechnen Sie die Länge der großen Bahnachse a der Mondbahn.
- Wie lange braucht die internationale Raumstation ISS auf ihrer näherungsweise Kreisbahn in 335 km Höhe für eine Umrundung der Erde?

### Aufgabe 7: Keplersche Gesetze

Der Pluto bewegt sich im mittleren Abstand von 39,5 AE mit der numerischen Exzentrizität  $\epsilon = 0,249$  um die Sonne.

- Berechnen Sie seine kleinste (Perihel) und größte (Aphel) Entfernung zur Sonne
- Wie lange braucht der Pluto für einen Umlauf?

### Aufgabe 8: Keplersche Gesetze

Johannes Kepler brauchte 40 Versuche und ca. 5 Jahre (u.a. mit eiförmigen Umlaufbahnen), um die von der Erde aus beobachteten Marsbahnen schließlich mit einfachen Ellipsen erklären zu können. Ellipsenbahnen hatte er zunächst in seinen Untersuchungen nicht berücksichtigt, weil er davon überzeugt war, dass solche einfachen und offensichtlichen Lösungen sicher schon lange vor ihm untersucht worden waren.

Erklären Sie mit Hilfe einer Skizze das Zustandekommen der typischen Schleifenbahnen, die man für den Mars von der Erde aus beobachtet. Der Mars bewegt sich im mittleren Abstand von 1,52 AE mit einer Umlaufdauer von 1,88 a um die Sonne. Seine Bahn ist wie die der Erde nahezu kreisförmig mit einer sehr kleinen numerischen Exzentrizität.

### Aufgabe 9: Keplersche Gesetze

Der Komet Tempel-Tuttle umrundet die Sonne auf einer elliptischen Bahn in einer Zeit von 33,24 Jahren. Seine kleinste Entfernung zur Sonne (Perihel) beträgt 0,976 AE.

- Berechnen Sie die Exzentrizität und die große Halbachse der Kometenbahn in AE
- Berechnen Sie die größte Entfernung zur Sonne (Aphel) in AE

### Aufgabe 10: Translation und Rotation

- Zeige, dass für die in der Zeit  $\Delta t$  zurückgelegte Wegstrecke  $\Delta s$  gilt:  $\Delta s = v \cdot \Delta t$  bei konstanter Geschwindigkeit  $v$  und  $\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$  bei konstanter Beschleunigung  $a$  aus dem Stand.
- Zeige entsprechend zu a), dass für die in der Zeit  $\Delta t$  überstrichenen Winkel  $\Delta \varphi$  gilt:  $\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t$  bei konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und  $\Delta \varphi = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2$  bei konstanter Winkelbeschleunigung  $\alpha$  aus der Ruhelage.

### Aufgabe 11: Trägheitsmoment

Ein Schwungrad rotiert mit der Frequenz  $f = 20 \text{ s}^{-1}$  um seine Symmetrieachse. Bezüglich dieser Achse hat es das Trägheitsmoment  $J = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Nun wird das Schwungrad in der Zeitspanne von  $\Delta t = 1 \text{ min}$  durch ein konstantes Drehmoment  $M$  bis zum Stillstand abgebremst.

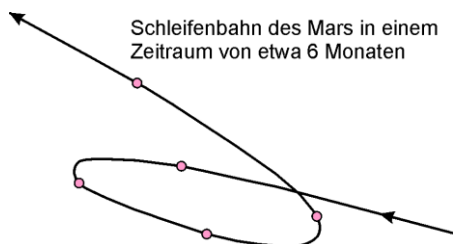
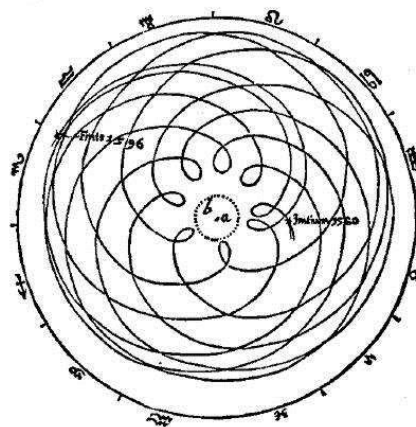
- Berechne das Bremsdrehmoment  $M$
- Berechne die durchschnittliche Leistung  $\bar{P}$ , die während des Bremsvorganges abgegeben wird.
- Berechne die Anzahl der Umdrehungen, die das Schwungrad im Laufe des Bremsvorganges ausgeführt hat.

### Aufgabe 12: Trägheitsmoment

Berechne jeweils die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die Translationsenergie  $E_{\text{trans}}$ , die Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$  und die gesamte kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = E_{\text{tran}} + E_{\text{rot}}$  der drei folgenden Körper mit der Masse  $m$ , wenn sie mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer horizontalen Ebene rollen:

Körper	J	$\omega$	$E_{\text{trans}}$	$E_{\text{rot}}$	$E_{\text{kin}}$
Hohlzylinder	$mr^2$				
Zylinder	$\frac{1}{2} mr^2$				
Kugel	$\frac{2}{5} mr^2$				

DE MOTIB. STELLÆ MARTIS



### Aufgabe 13: Trägheitsmoment

Max und Lisa helfen ihrem Vater beim Reifenwechsel. Sie haben ein paar Bretter auf eine 1 m hohe Gartenmauer gelehnt, wuchten die Reifen dort hinauf und lassen sie über die schiefe Ebene wieder hinunterrollen, damit der Vater sie auffangen kann, bevor sie ins Auto krachen. Lisa nimmt 10 kg schwere Reifen mit Innenradius  $r_1 = 27$  cm und Außendurchmesser  $r_2 = 35$  cm ohne Felge, während der starke Max die gleichen Reifen auf 6 kg schweren Felgen nimmt. Die Reifen können als dicke Hohlzylinder mit Trägheitsmoment  $J = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$  betrachtet werden. Reifen mit Felgen werden als Zylinder mit  $J = \frac{1}{2} mr^2$  angenähert. Rechne mit  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

- Berechne die gesamte kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}}$  der Reifen mit und ohne Felge in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit  $v$ .
- Wie schnell sind die Reifen mit und ohne Felge am Fuß der 1 m hohen schiefen Ebene?

### Aufgabe 14: Trägheitsmoment

Ein JoJo besteht aus zwei 5 mm dicken Schwungscheiben aus Stahl mit dem Radius  $r_2 = 4$  cm, die im Abstand von 5 mm auf einer Achse aus dem gleichen Material mit den Radius  $r_1 = 4$  mm sitzen. An dieser Achse ist zwischen den beiden Schwungscheiben der Faden befestigt. Stahl hat die Dichte  $\rho = 7,8$  g/cm<sup>3</sup>.

- Berechne die Masse  $m$  und das Trägheitsmoment  $J$  des JoJos. Der mittlere Abschnitt der Achse kann vernachlässigt werden.
- Berechne die gesamte kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}}$  des JoJos, wenn es beim Abrollen die Sinkgeschwindigkeit  $v$  erreicht hat.
- Berechne die gesamte kinetische Energie aus b) in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .
- Wie viel Prozent der Gesamtenergie wird durch die Translation bewirkt?
- Welche Winkelgeschwindigkeit und welche Sinkgeschwindigkeit  $v$  hat das JoJo, wenn es um eine Höhe von 50 cm abgesunken ist? Rechne mit  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> und vernachlässige die Translationsenergie.



### Aufgabe 15: Trägheitsmoment

Auf einem Drehstuhl sitzt ein Schüler mit zwei 1 kg schweren Hantel, die er dicht an seinem Körper mit dem Abstand  $r_1 = 10$  cm von der Drehachse hält. nun wird der Schüler in Rotation mit einer Umdrehung pro Sekunde versetzt. Er streckt die Arme aus, so dass die Hanteln nun einen Abstand von  $r_2 = 70$  cm von der Drehachse haben, wodurch sich seine Drehfrequenz auf 3 Umdrehungen in 4 Sekunden verringert. Berechne das Trägheitsmoment  $J_S$  des Schülers. Die Änderung seines Trägheitsmoments durch das Ausstrecken der Arme kann vernachlässigt werden.

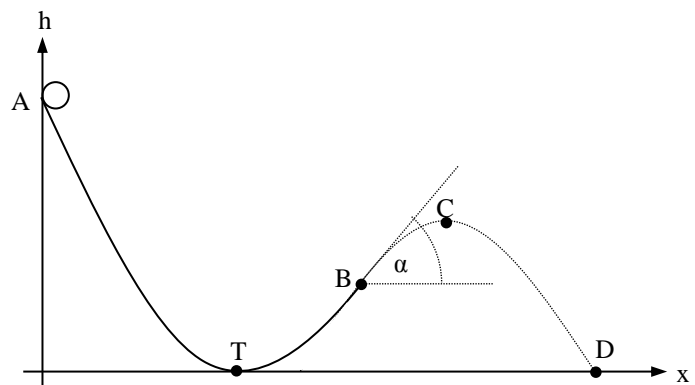
### Aufgabe 16: Rotation und schiefer Wurf (10)

Eine Kugel mit Radius  $r$  und Masse  $m$  rollt wie rechts skizziert aus der Ruhe im Punkt A mit der Höhe  $h_A = 2,25$  m eine gebogene Rinne hinunter.

Der Tiefpunkt T der Rinne wird auf der Höhe  $h_T = 0$  m mit der Bahngeschwindigkeit  $v_T$  durchlaufen. Im Punkt B verlässt sie die Rinne in der Höhe  $h_B = 0,8$  m im Winkel von  $\alpha = 55^\circ$  zur Horizontalen mit der Bahngeschwindigkeit  $v_B$ .

Sie erreicht den höchsten Punkt C der Flugbahn in der Höhe  $h_C$  mit der Bahngeschwindigkeit  $v_C$ .

Im Punkt D mit  $h_D = 0$  landet die Kugel mit der Bahngeschwindigkeit  $v_D$ .



- Berechne die Bahngeschwindigkeit  $v_T$ . Berücksichtige auch die Rotationsenergie der Kugel. (2)
- Berechne die Bahngeschwindigkeit  $v_B$ . (1)
- Berechne die Bahngeschwindigkeit  $v_C$ . (1)
- Berechne die Höhe  $h_C$ . (2)
- Berechne die Bahngeschwindigkeit  $v_D$ . (2)
- Begründe ohne Rechnung nur mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes, warum  $v_D$  grösser als  $v_T$  sein muss. (2)

## 1.7. Lösungen zu den Aufgaben zur Drehimpulserhaltung

### Aufgabe 1: Drehimpuls

a) Geschwindigkeit  $v = \omega r = 2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ s}^{-1} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,8\pi \text{ m/s}$  und Drehimpuls  $L = r \cdot m \cdot v = 0,0048\pi \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ .

b) Der Drehimpuls bleibt gleich:  $L = r' \cdot m \cdot v'$ . Bei halbem Radius  $r' = \frac{r}{2}$  erhält man die doppelte Geschwindigkeit  $v' = \frac{L}{r' \cdot m} = 2 \cdot v = 1,6\pi \text{ m/s}$  und die vierfache Umlauffrequenz  $\omega' = \frac{v'}{r'} = 4\omega$ . Die Kugel schafft also nun 8 Umläufe pro Sekunde!

### Aufgabe 2: Drehimpuls

$L_{\text{Anton}} = r \cdot m \cdot v = 0,35 \text{ m} \cdot 0,980 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} = 3,43 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  und  $L_{\text{Jesse}} = r \cdot m \cdot v = 0,325 \text{ m} \cdot 0,910 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s} \approx 2,96 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ . Der

größere Drehimpuls beim 28-Zoll-Rad benötigt auch ein größeres Drehmoment zur freiwilligen oder unfreiwilligen Änderung: Anton braucht mehr Kraft zum Lenken, kann aus dem gleichen Grund aber auch besser freihändig fahren, weil das Rad stabiler ist.

### Aufgabe 3: Drehimpuls

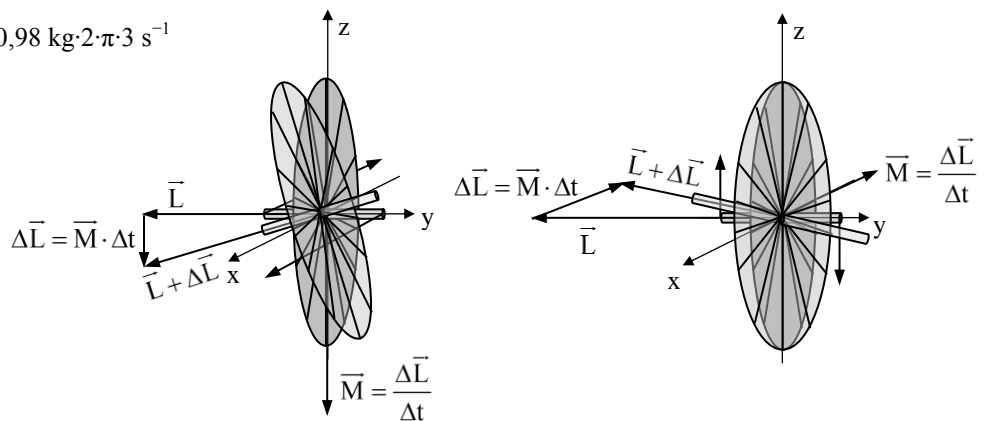
a)  $L = r \cdot m \cdot v = r^2 \cdot m \cdot \omega = (0,35 \text{ m})^2 \cdot 0,98 \text{ kg} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 \text{ s}^{-1} \approx 2,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 2,26 \text{ Nm} \cdot \text{s}$

b)  $M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \approx 0,45 \text{ Nm}$

c)  $F_{\text{Daumen}} = \frac{M}{r_{\text{Daumen}}} \approx 11,3 \text{ N}$

d) siehe rechts

e) siehe ganz rechts



### Aufgabe 4: Keplersche Gesetze

a) 1 Tag

b) genau über dem Äquator

c) Fernsehen, Mobilfunk, Wetter, GPS

d) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt  $r = r' \cdot \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3} \approx 42\,398 \text{ km}$  vom Erdmittelpunkt entfernt bzw.  $36\,027 \text{ km}$  über der Erdoberfläche.

### Aufgabe 5: Keplersche Gesetze

a) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt  $T' = T \cdot \left(\frac{r'}{r}\right)^{3/2} \approx 1,87 \text{ a}$ .

b) Erde:  $v = \omega r \approx 107\,228 \text{ km/h}$  und Mars:  $v' = 87\,159 \text{ km/h}$

### Aufgabe 6: Keplersche Gesetze

a) Perigäum:  $a + e = 3,57 \cdot 10^5 \text{ km}$ ; Apogäum:  $a - e = 4,07 \cdot 10^5 \text{ km} \Rightarrow$  große Halbachse  $a = \frac{1}{2}(3,57 + 4,07) \cdot 10^5 \text{ km} \approx 3,82 \cdot 10^5 \text{ km}$ .

b) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt  $T' = T \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} \approx 1,5 \text{ h}$ .

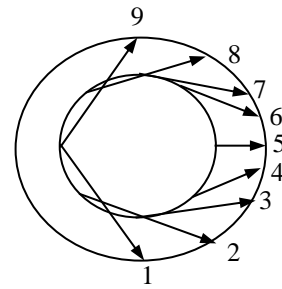
### Aufgabe 7: Keplersche Gesetze

Aus  $a = 39,5 \text{ AE}$  ergibt sich die Exzentrizität  $e = \varepsilon \cdot a \approx 9,8 \text{ AE}$  und das Perihel  $a - e \approx 29,7 \text{ AE}$  und das Aphel  $a + e = 49,3 \text{ AE}$

Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt  $T' = T \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} \approx 248,2 \text{ a}$

### Aufgabe 8: Keplersche Gesetze

Die Schleife entsteht beim Überholvorgang vom inneren, schnelleren Planeten aus gesehen, wenn dessen Eigendrehachse etwas zur Ellipsenebene geneigt ist. Der äußere Planet wandert von 1 – 4 nach Osten, von 5 – 6 nach Westen und von 7 – 9 wieder nach Osten. Die Skizze ist vereinfacht für eine doppelt so lange Umlaufzeit des äußeren Planeten gezeichnet. In diesem Fall würde sich nur eine einzige geschlossene Schleife ergeben.



### Aufgabe 9: Keplersche Gesetze

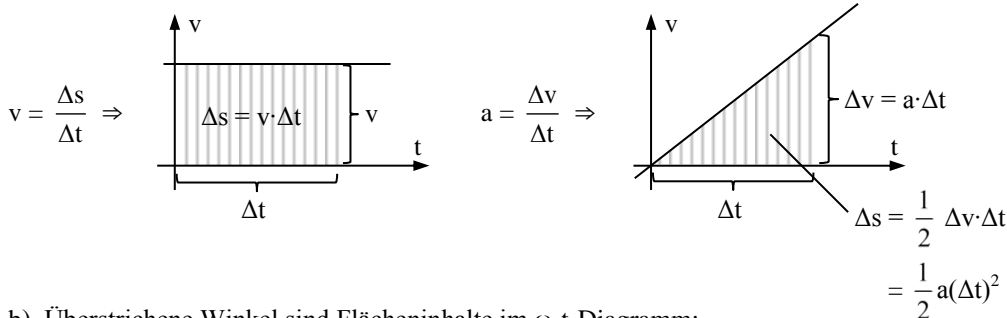
a) Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt  $a' = a \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3} \approx 10,334 \text{ AE}$ .

Die Exzentrizität ist also  $e = \frac{1}{2}(a + e - (a - e)) \approx 4,681 \text{ AE}$

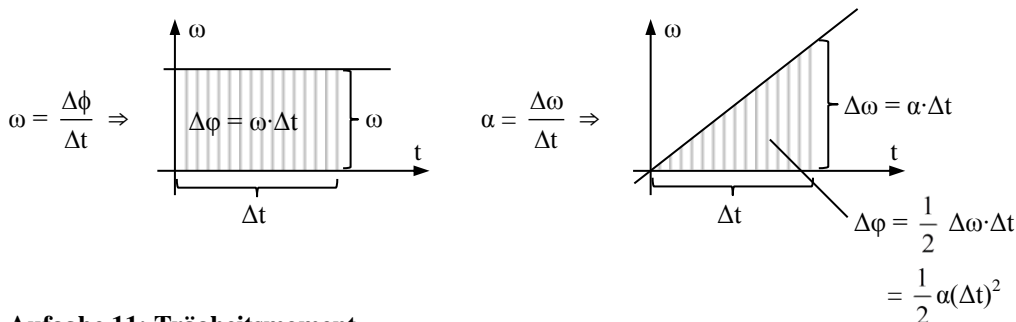
b) Das Aphel liegt bei  $a + e = 15,015 \text{ AE}$ .

### Aufgabe 10: Translation und Rotation

a) Zurückgelegte Strecken sind Flächeninhalte im v-t-Diagramm:



b) Überstrichene Winkel sind Flächeninhalte im ω-t-Diagramm:



### Aufgabe 11: Trägheitsmoment

a)  $M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = J \cdot \alpha = 40\pi \text{ Nm}$  mit der Winkelbeschleunigung  $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20}{60 \text{ s}^2} = \frac{2}{3} \pi \text{ s}^{-2}$ .

b)  $\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{J \cdot \omega^2}{2 \cdot \Delta t} = 800\pi \text{ W}$ .

c)  $\Delta \phi = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 = 1200\pi$  bzw. 600 Umdrehungen.

### Aufgabe 12: Trägheitsmoment

Körper	J	$\omega$	$E_{\text{trans}}$	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E_{\text{kin}}$
Hohlzylinder	$mr^2$	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{2} mv^2$	$mv^2$
Zylinder	$\frac{1}{2} mr^2$	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{4} mv^2$	$\frac{3}{4} mv^2$
Kugel	$\frac{2}{5} mr^2$	$\frac{v}{r}$	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{5} mv^2$	$\frac{7}{10} mv^2$

### Aufgabe 13: Trägheitsmoment

Alles in SI!

a) Reifen ohne Felge:  $\omega = \frac{v}{r_2} \Rightarrow E_{\text{kin}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_R v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m_R v^2 + \frac{1}{4} m_R \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right) v^2 = \frac{1}{4} m_R \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} + 3 \right) v^2 \approx 9v^2$ .

Reifen mit Felge:  $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow E_{\text{kin}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_{R+F} v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m_{R+F} v^2 + \frac{1}{4} m_{R+F} v^2 = \frac{3}{4} m_{R+F} v^2 \approx 12v^2$ .

a) Energieerhaltung:  $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}'} + E_{\text{kin}'} \Leftrightarrow E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}'}$ :

$\Rightarrow$  Reifen ohne Felge:  $m_R \cdot g \cdot h = \frac{1}{4} m_R \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} + 3 \right) v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{\frac{r_1^2}{r_2^2} + 3}} \approx 3,33 \text{ m/s}$

$\Rightarrow$  Reifen mit Felge:  $m_{R+F} \cdot g \cdot h = \frac{3}{4} m_{R+F} v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}} \approx 3,65 \text{ m/s}$

### Aufgabe 14: Trägheitsmoment

a) Masse  $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi r_2^2 \cdot d = 392,1 \text{ g}$  mit der gesamten Dicke  $d = 1 \text{ cm}$  der beiden Scheiben.

Trägheitsmoment  $J = \frac{1}{2} m r_2^2 = 992,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$

b)  $E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{trans}} = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4} m r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{2r_2^2} + 1 \right) m v^2 = 25 m v^2 + 0,5 m v^2$ .

c)  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{2r_2^2} + 1 \right) m v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{2} + r_2^2 \right) m \omega^2 \approx 4,08 \cdot 10^{-4} m \omega^2$

d)  $\frac{E_{\text{trans}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2}{\frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{2r_2^2} + 1 \right) m \omega^2} = \frac{1}{\frac{r_1^2}{2r_2^2} + 1} = \frac{1}{51} \approx 2 \%$

e)  $E_{\text{pot}} = E_{\text{rot}'} \Leftrightarrow mgh = \frac{1}{4} m r_1^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{2}{r_1} \sqrt{g \cdot h} \approx 79 \text{ s}^{-1}$  entspricht 12,6 Umdrehungen pro Sekunde.

### Aufgabe 15: Trägheitsmoment

$E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}'} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (J_S + 2m r_1^2) \omega = \frac{1}{2} (J_S + 2m r_2^2) \omega' \Leftrightarrow J_S = \frac{2m(r_2^2 \omega' - r_1^2 \omega)}{\omega - \omega'} = 2,86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  mit der Hantelmasse  $m = 1 \text{ kg}$  und den Winkelgeschwindigkeiten vorher  $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$  sowie nachher  $\omega' = 1,5\pi \text{ s}^{-1}$ .

### Aufgabe 16: Rotation und schiefer Wurf: (10)

a) Mit dem Trägheitsmoment  $J = \frac{2}{5} m r^2$  ist die Rotationsenergie  $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{5} m v^2$  (1)

Aus  $E_{\text{potA}} = E_{\text{transT}} + E_{\text{rotT}} \Leftrightarrow m \cdot g \cdot h_A = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{5} m v_T^2 = \frac{7}{10} m v_T^2$  folgt  $v_T = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h_A}{7}} \approx 5,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (1)

b) Aus  $E_{\text{potA}} = E_{\text{transB}} + E_{\text{rotB}} + E_{\text{potB}}$  folgt wie in b)  $v_B = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot (h_A - h_B)}{7}} \approx 4,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (1)

c) Beim schiefen Wurf bleibt die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit erhalten:  $v_C = v_{Bx} = v_B \cdot \cos(\alpha) \approx 2,61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (1)

d) Die Energiebilanz  $E_{\text{transB}} + E_{\text{rotB}} + E_{\text{potB}} = E_{\text{transC}} + E_{\text{rotC}} + E_{\text{potC}}$  vereinfacht sich wegen  $E_{\text{rotB}} = E_{\text{rotC}}$  zu

$E_{\text{transB}} + E_{\text{potB}} = E_{\text{transC}} + E_{\text{potC}} \Leftrightarrow y_C = y_B + \frac{v_B^2 - v_C^2}{2g} \approx 1,49 \text{ m}$  (2)

e) Wieder wegen  $E_{\text{rotB}} = E_{\text{rotD}}$  gilt  $E_{\text{transB}} + E_{\text{potB}} = E_{\text{transD}}$  und damit  $v_D = \sqrt{v_B^2 + 2 \cdot g \cdot h_B} \approx 7,10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (2)

f) Die potentielle Energie bleibt gleich. Die Translationsenergie und damit die Geschwindigkeit wird aber größer, weil die Rotationsenergie auf dem Anstieg von T nach B kleiner geworden ist und dann in der Luft auf dem Weg nach D unverändert bleibt. Die zwischen T und B verlorene Rotationsenergie wird beim freien Fall in der Luft in zusätzlicher Translationsenergie umgewandelt. (2)