Stiftschule, PAM 1)

Eindimensionales Keplerproblem

Driton Komani

18 janvier 2014

Man denke sich im Nullpunkt der x-Achse ein Massenpunkt der Masse M ruhend. Auf der positiven x-Achse bewege sich ein Massenpunkt der Masse m. Die Masse m sei sehr viel kleiner als die Masse M, sodass es (näherungsweise) gerechtfertigt ist, die Gravitationskraft, die m nach Newton auf M ausübt zu vernachlässigen. Hingegen werde das Bewegungsverhalten von m durch M gemäss dem Newton's Gravitationsgesetz bestimmt. Unter Verwendung des des Grundgesetzes der Mechanik erhält man für die Bewegung von m eine Bewegungsdifferentialgleichung (nach Division durch m) :

Aufgabe 1. Machen Sie eine Skizze und Formulieren Sie die Bewegungsdifferentialgleichung. (Bezeichne die Gravitationskonstante mit γ und setze $K^2 = \gamma M$.)

Lösung. *Aus der Aufgabenstellung entnimmt man, dass Auf die Erde keine Kraft wirkt, also ruht die Erde im Nullpunkt. Die Kraft, die auf eine Masse m am Ort $x(t) > 0$ wirkt ist durch das Newtonsche Gravitationsgesetz gegeben, das lautet*

$$F = m \cdot \ddot{x}(t) = -\frac{\gamma M m}{x(t)^2}.$$

Setze $K^2 = \gamma M$ und dividiere durch die Masse m um die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{K^2}{x(t)^2} = 0} \tag{1}$$

zu erhalten. Die Skizze ist klar.

Aufgabe 2. Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung Galilei's berühmte Formel für den freien Fall

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

her. Welche Beziehung besteht zwischen den Konstanten g, γ, M und R (Erdradius) ?
Tipp. Setzen Sie $x(t) = R + s(t)$ und bedenken Sie, dass $|s| << R$ gilt.

Lösung. *Setze $x(t) = R + s(t)$ in die Bewegungsgleichung (1) ein und erhalte*

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= -\tfrac{K^2}{(R+s(t))^2} \\ &= -\tfrac{K^2}{R^2} \cdot \tfrac{1}{\left(1+\frac{s(t)}{R}\right)^2} \end{aligned}$$

Für R viel grösser als $s(t)$, das heisst wenn unsere Masse nahe an der Erdoberfläche ist, folgt dass $s(t)/R \simeq 0$ und somit $1/(1 + \frac{s(t)}{R})^2 \simeq 1$. Also wenn man nah an der Erdoberfläche ist, darf man den Term (fälschlicherweise) $1/(1 + \frac{s(t)}{R})^2$ gleich 1 setzen ohne, dass man einen allzugrossen Fehler macht und erhält

$$\ddot{s}(t) = -\frac{K^2}{R^2} = -g.$$

Löst man diese (falsche) angenäherte Bewegungsgleichung durch zweimaliges integrieren erhält man

$$s(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

Dies ist Galileos falsche aber näherungsweise zutreffende Formel für das Fallen einer Masse. Galileos Formel ist deshalb falsch, weil Galileo angenommen hat dass die Erdbeschleunigung konstant ist. Die Erdbeschleunigung ist aber umgekehrtproportional zum quadrat des abstandes.

Aufgabe 3. Die Differentialgleichung aus Aufgabe 1 besitzt eine einparametrige Schar von Lösungen der Form

$$x(t) = a(t+c)^b. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Konstanten a, b und c, so dass die Ortsfunktion (2) die Bewegungsdifferentialgleichung der Aufgabe 1 löst und die Anfangsbedingung

$$x(0) = R$$

erfüllt. Man spricht vom *vertikalen Schuss in den Weltraum.* Bestimmen Sie

$$\lim_{t\to\infty} x(t), \quad v_0 = \dot{x}(0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) \tag{3}$$

Lösung. *Setze (2) in (1) ein :*

$$\begin{aligned} ab(b-1)(t+c)^{b-2} + \tfrac{K^2}{a^2(t+c)^{2b}} &= 0 \quad | \quad \cdot\, a^2(t+c)^{2b} \\ a^3b(b-1)(t+c)^{3b-2} &= -K^2 \end{aligned}$$

Weil der linke Term konstant sein muss damit die Gleichung Gültigkeit hat, muss die Hochzahl $= 0$ *sein also* $b = 2/3$. *Nachdem man* $b = 2/3$ *einsetzt und nach* a *auflöst erhält man*

$$a = \left(\frac{K^2}{2/3(1/3)}\right)^{1/3} = \left(\frac{9K^2}{2}\right)^{1/3}.$$

Aus $x(0) = R$ *folgt dann*

$$ac^{\frac{2}{3}} = R \Leftrightarrow c = \left(R \cdot \left(\frac{9K^2}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = R^{\frac{3}{2}}\left(\frac{9K^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = R^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{3K}.$$

Die vollständige Lösung in abhängigkeit von K *und* R *lautet nun*

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{9K^2}{2}\right)^{1/3} \cdot \left(t + R^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{3K}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Einmaliges Ableiten unter Verwendung der Kettenregel ergibt

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9K^2}{2}\right)^{1/3} \cdot \left(t + R^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{3K}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

In dem man die Hochzahlen anschaut (positiv oder negativ) kann man auf das Verhalten im Unendlichen schliessen. Wir erhalten

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Das heisst die Masse bewegt sich ins unendliche fort mit immer kleiner werdender Geschwindigkeit. Desweiteren gilt

$$v_0 = \dot{x}(0) = \frac{2}{3}\left(\frac{9K^2}{2}\right)^{1/3} \cdot \left(R^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{3K}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{27K^3}{2\sqrt{2}R^{3/2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2K}{\sqrt{2R}}.$$

Aufgabe 4. Wenn Sie die Bewegungsdifferentialgleichung mit der Momentangeschwindigkeit $\dot{x}$ multiplizieren, können Sie sie einmal integrieren. Vornehmer : Man betrachte die Funktion

$$E(x, v) := \frac{1}{2}v^2 - \frac{K^2}{x}.$$

Man zeige : Ist die Funktion $x(t)$ eine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung und setzt man $v(t) = \dot{x}(t)$, so ist die Funktion $E(x, v)$ konstant auf dieser Lösung, d.h. es gilt

$$E(x(t), v(t)) = E(x(0), v(0)) \quad \text{für alle} \quad t.$$

Man nennt die Funktion $E(x, v)$ ein *Integral* der Bewegungsdifferentialgleichung. Mit anderen Worten. Lösungen $(x(t), v(t))$ mit $v(t) = \dot{x}(t)$ verlaufen auf *Niveaulinien* von E.

Lösung. *Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit $\dot{x}(t)$ und integrieren nach der Zeit :*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)\tfrac{K^2}{x(t)^2} &= 0 \quad | \ \textstyle\int \ldots dt \\ \tfrac{1}{2}\dot{x}(t)^2 - \tfrac{K^2}{x(t)} &= e \end{aligned}$$

Durch Integration von der Nullfunktion erhalten wir die Konstante e. Wir haben gesehen, dass wenn eine Ortsfunktion $x(t)$ die Gleichung (1) erfüllt, dann ist der Term

$$E(x(t), v(t)) = \frac{1}{2}v(t)^2 - \frac{K^2}{x(t)} \quad \textit{mit} \quad v(t) = \dot{x}(t)$$

konstant. Die Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\boxed{(x, v) \longmapsto E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{K^2}{x}}$$

*wird **Energiefunktion** genannt. Der Term $\frac{1}{2}v^2$ heisst **kinetische Energie** und der Term $-\frac{K^2}{x}$ heisst **potentielle Energie**. (Beachte, dass die Rechnung oben zufällig den Energiesatz beweist.)*

Aufgabe 5. Benutzen Sie E um folgendes *zu zeigen.* Ist $(x(t), v(t))$ eine Lösung der Bewegungsgleichung, mit $v(t) = \dot{x}(t)$, wobei gilt

$$v(0) < v_0,$$

dann ist $x(t)$ *beschränkt.*

Lösung. *Auflösung der Gleichung* $E(x(t), v(t)) = E(x(0), v(0))$ *ergibt*

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{2K^2}{v(t)^2 + \frac{2K^2}{R} - v(0)^2} \\ &< \tfrac{2K^2}{\frac{2K^2}{R} - v(0)^2} = C \end{aligned}$$

Zeige nun, dass der Term C *rechts positiv ist : Da* $v_0^2 = 2K^2/R$ *folgt aus der voraussetzung* $v(0) < v_0$ *dass auch* $v_0^2 - v(0)^2$ *positiv ist, also ist* C *positiv. Damit folgt das* $x(t)$ *kleiner als eine Konstante ist, d.h. beschränkt.*

Anmerkungen.

(i) In der Physik heisst die Beziehung

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{K^2}{x} = \text{konst.}$$

Energiesatz.

(ii) Die Überlegungen in der Aufgabe 4 können als ein erster Blick in die sogenannte *qualitative* oder *geometrische Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen* bezeichnet werden. Die Pointe ist die : Man findet etwas über das Verhalten von Lösungen heraus, *ohne*, dass man Lösungsformeln kennt (oder benützt).