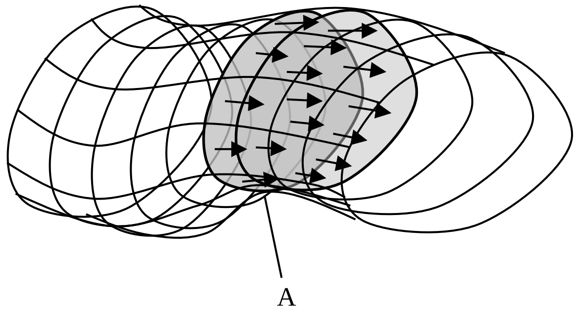
1.9. Hydrodynamik

1.9.1. Volumenstrom und Massenstrom



Strömt eine Flüssigkeit durch ein Gefäss, so bezeichnet der **Volumenstrom** $\dot{V}$ an einer gegebenen Querschnittsfläche A das durchgeströmte Volumen dV in der dafür benötigten Zeit dt: $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$. Allgemein symbolisiert man sehr kleine (**differentielle**) Änderungen mit einem vorangestellten **d** und die **zeitliche Änderung** einer Grösse häufig mit einem **Punkt**. Die obige Gleichung liest sich also folgendermassen:

Volumenstrom = zeitliche Änderung des Volumens = $\frac{\text{differentielle (kleine) Volumenänderung}}{\text{entsprechende differentielle (kleine) Zeitänderung}}$

Weitere Beispiele:

Massenstrom = zeitliche Änderung der Masse = $\frac{\text{Massenänderung}}{\text{Zeitänderung}}$: $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho \cdot dV}{dt} = \rho \cdot \dot{V}$

Geschwindigkeit = zeitliche Änderung des Ortes = $\frac{\text{Ortsänderung}}{\text{Zeitänderung}}$: $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v$

Beschleunigung = zeitliche Änderung der Geschwindigkeit = $\frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitänderung}}$: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = a$

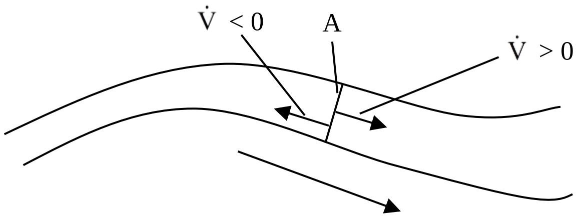
Leistung = zeitliche Änderung der Energie = $\frac{\text{Energieänderung}}{\text{Zeitänderung}}$: $\dot{E} = \frac{dE}{dt} = P$

Elektrische Stromstärke $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = I$

In Anlehnung an die elektrische Stromstärke wird $\dot{V}$ auch als I_V bezeichnet.

Richtung des Volumenstroms

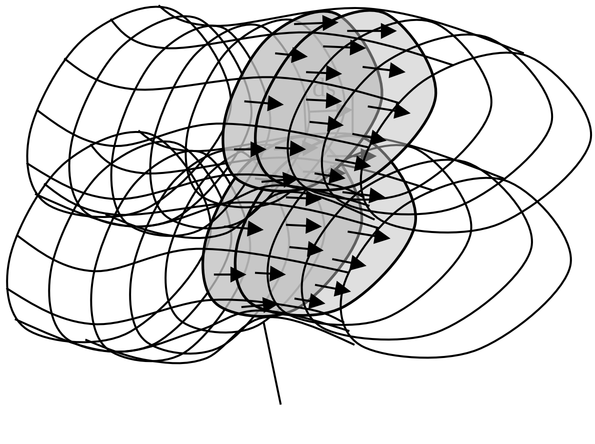
Wie bei allen anderen zeitlichen Änderungen muss immer eine **Bezugsrichtung** festgelegt werden, um angeben zu können, ob das Volumen zu- oder abfliesst. Die Bezugsrichtung wird als **Pfeil** ausserhalb des Gefässes gezeichnet: Fliesst das Volumen **in** Pfeilrichtung, so ist $\dot{V}$ **positiv**, **gegen** die Pfeilrichtung ist $\dot{V}$ **negativ**.



Übungen: Aufgaben zur Hydrodynamik Nr. 1 und 2

1.9.2. Die Strömungsgeschwindigkeit

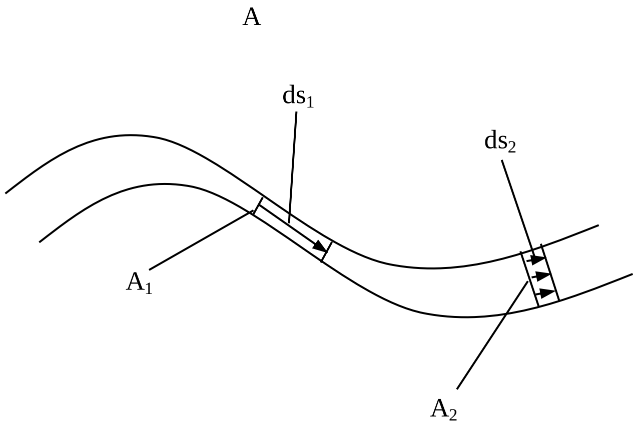
Bei **konstantem Querschnitt** A ist die Volumenänderung dV = A·ds mit dem in Flussrichtung zurückgelegten Weg ds. Man erhält dann $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot \dot{s} = A \cdot v$, wobei v die **mittlere Strömungsgeschwindigkeit** eines Flüssigkeitsteilchens ist.



Übungen: Aufgaben zur Hydrodynamik Nr. 4 –

1.9.3. Die Kontinuitätsgleichung

Bei **variablen Querschnitten** ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit: An engen Stellen müssen die Teilchen schneller fliessen, damit es keinen Stau gibt. Um die **momentane Strömungsgeschwindigkeit** genau an einem Querschnitt A zu ermitteln, muss die Zeitänderung (= Messdauer) dt so klein gewählt werden, dass sich der Querschnitt A auf dem zurückgelegten Weg ds der Teilchen nicht wesentlich ändert. Dann gilt weiterhin dV = A·ds und $\dot{V}$ = A·v. Misst man jetzt an verschiedenen Querschnitten A_1 und A_2, so ist der Volumenstrom bei **inkompressiblen Flüssigkeiten** gleich und man erhält die **Kontinuitätsgleichung $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$**: Je kleiner der Querschnitt, desto schneller die Teilchen und umgekehrt.



Kompressible Gase werden an engen Stellen zusammengedrückt, d.h. es gehen immer noch gleich viele Teilchen pro Zeit durch den kleinen Querschnitt, aber sie benötigen weniger Raum. Der Massenstrom $\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}$ bleibt konstant aber die Dichte ρ nimmt zu und der Volumenstrom $\dot{V}$ nimmt ab.

Übungen: Aufgaben zur Hydodynamik Nr. 4 –

1.9.4. Volumenstrom-Zeit-Diagramme

Häufig zeichnet ein Schieber oder Ventil automatisch z.B. per Blasenzähler den **Volumenstrom** $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ auf.

Beispiel:

$0 \le t \le 6$ min: Konstanter Zulauf

$\dot{V}$ = 50 l/min

$6 \le t \le 7$ min: Gleichmäßiges Drosseln

$\dot{V}(t) = -50\ \text{l/min}^2 \cdot (t - 7\ \text{min})$

$7 \le t \le 9$ min: Keine Aktivität

$\dot{V} = 0$

$9 \le t \le 10$ min: Gleichmäßiges Öffnen der Abläufe

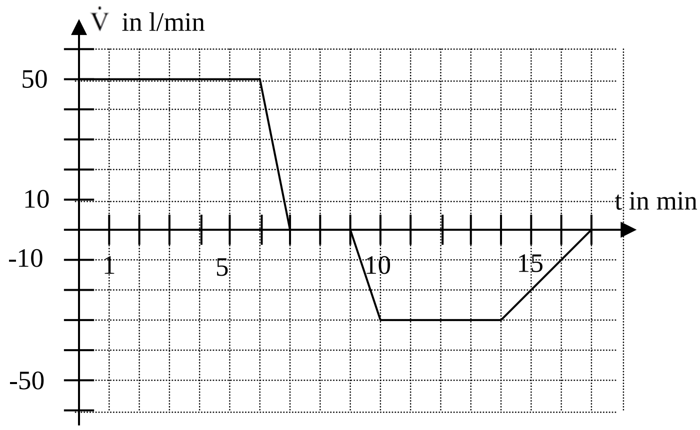
$\dot{V}(t) = -30\ \text{l/min}^2 \cdot (t - 9\ \text{min})$

10 min $\le t \le$ 14 min: Konstanter Ablauf:

$\dot{V}$ = -30 l/min

14 min $\le t \le$ 17 min: Gleichmäßiges Drosseln

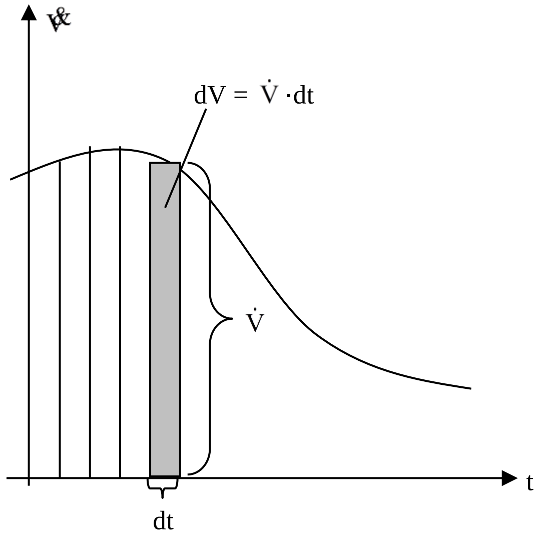
$\dot{V}(t) = 10\ \text{l/min}^2 \cdot (t - 17\ \text{min})$



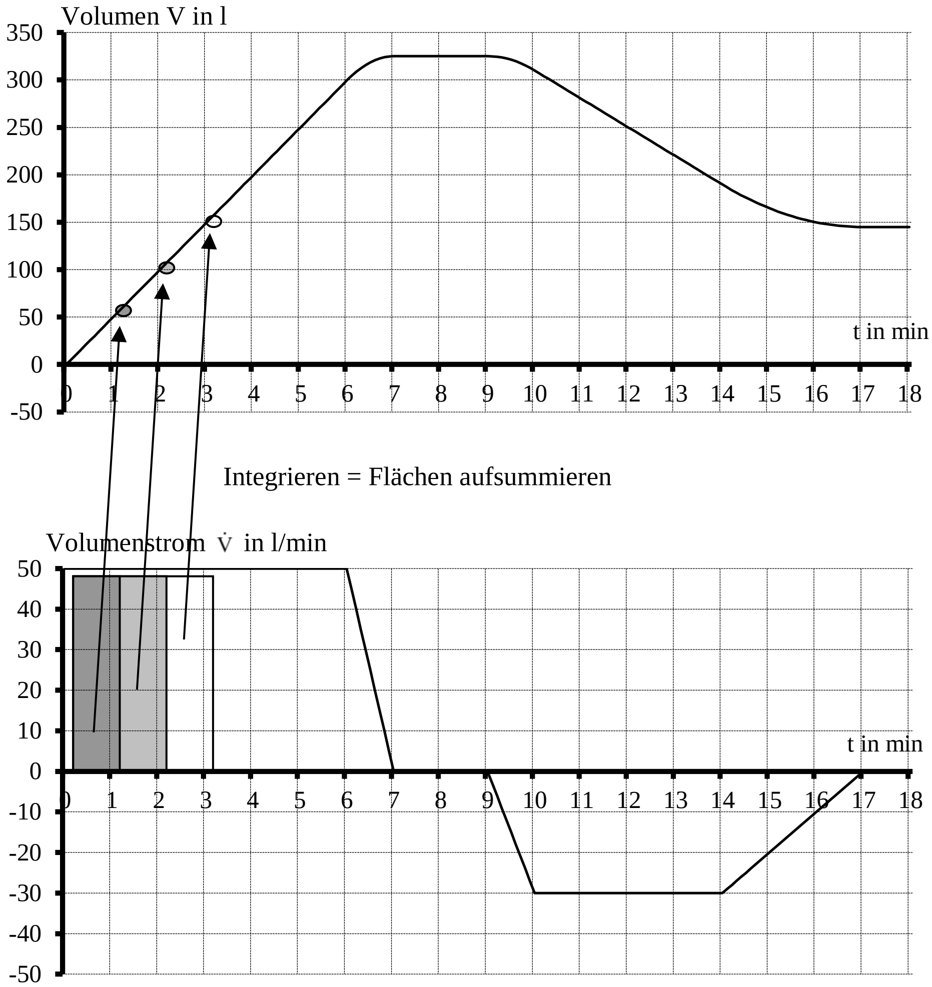
Übungen: Aufgaben zur Hydraulik Nr. 8 -

1.9.5. Volumenstrom → Volumen (Integration)

Für z.B. die Wasserrechnung oder Ölrechnung ist nicht der **Volumenstrom** $\dot{V}$ sondern das insgesamt durchgeströmte **Volumen** V gefragt. Dazu muss der angeschlossene Rechner die kleinen Volumenänderungen $dV = \dot{V} \cdot dt$ **aufsummieren** (**integrieren**). Als Symbol für diese **Summe** dient häufig das **Integralzeichen S**: $V = \int dV = \int \dot{V} \cdot dt$. Häufig wird der Volumenstrom $\dot{V}$ über die Zeit t in einem $\dot{V}$-t-Diagramm grafisch aufgezeichnet. In diesem $\dot{V}$-t-Diagramm erscheinen die Volumenänderungen $dV = \dot{V} \cdot dt$ als schmale Rechtecke, deren Flächeninhalt der Rechner (**Integrator**) z.B. durch Abzählen der Rasterkästchen bestimmt.



Beispiel:

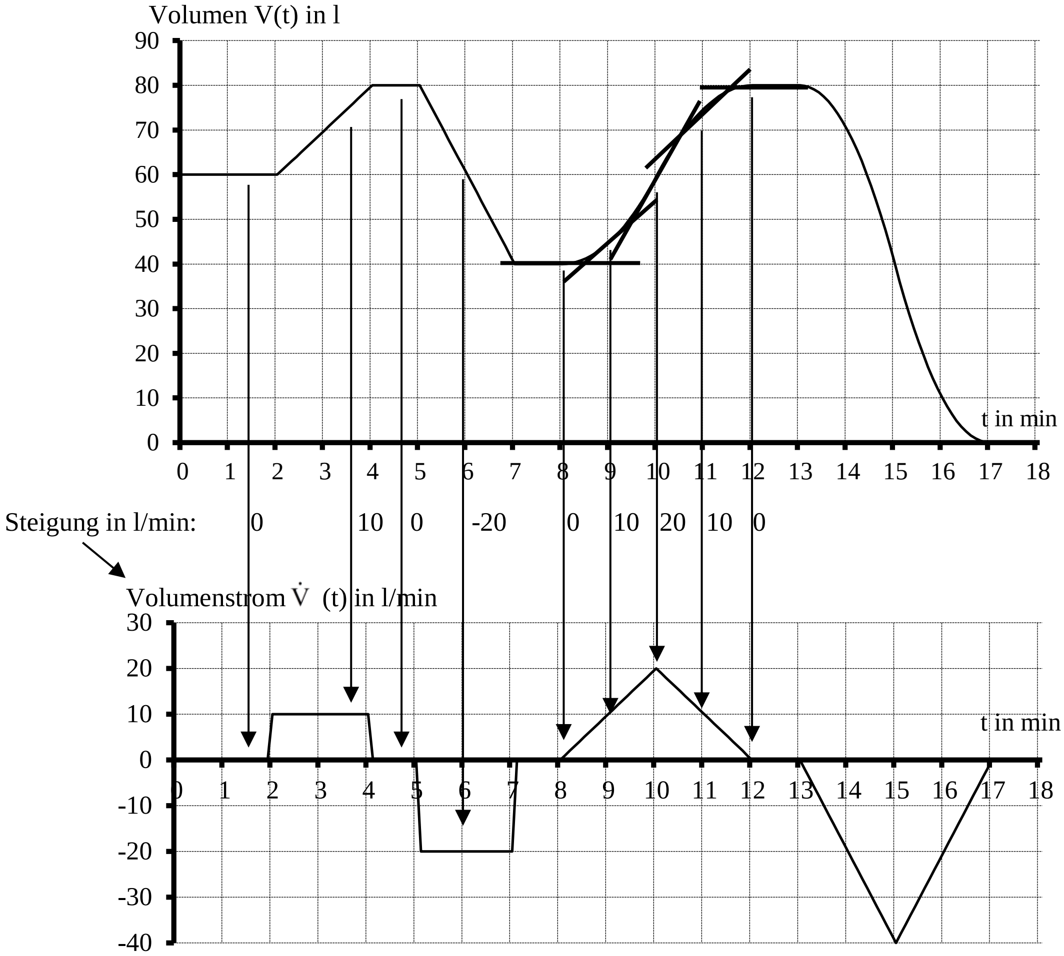


Übungen: Aufgaben zur Hydrodynamik Nr. 7

1.9.6. Volumen → Volumenstrom (Differentiation)

Um umgekehrt aus dem Volumen-Zeit-Diagramm das Volumenstrom-Zeit-Diagramm zu **abzuleiten**, muss man die **Tangentensteigungen** $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\text{Volumenänderung}}{\text{Zeitänderung}}$ am V-t-Diagramm auftragen. Weil dabei das Verhältnis der Volumendifferenz zur Zeitdifferenz jeweils zeichnerisch ermittelt wird, spricht man auch von **graphischer Differentiation**.

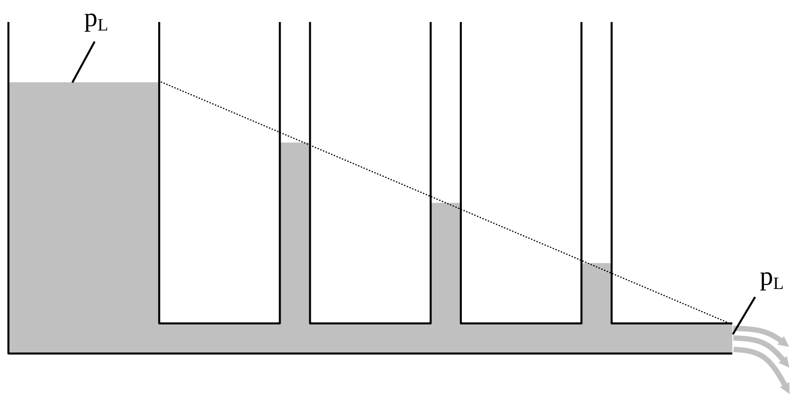
Beispiel:



Übungen: Aufgaben zur Hydrodynamik Nr. 8

1.8.6. Druck in strömenden Flüssigkeiten

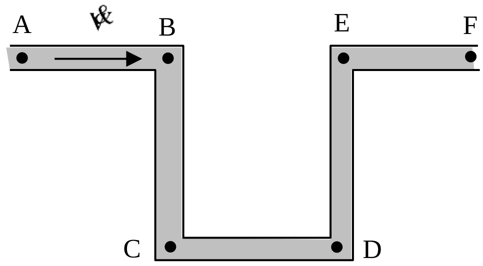
Durch den Reibungswiderstand der Begrenzungsflächen nimmt der Druck in Strömungsrichtung linear ab:

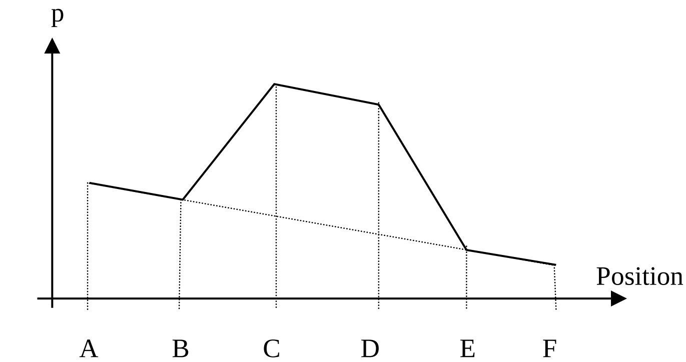


2.4.7. Druck-Positions-Diagramme

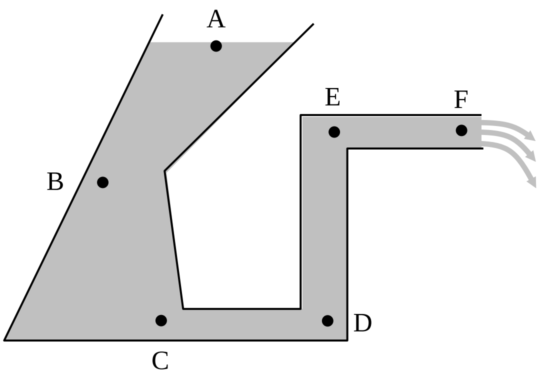
Der Druckverlauf in einem Gefäß kann nun qualitativ mit Hilfe der zwei bekannten Regeln skizziert werden:
Der Druck nimmt
1. infolge des Reibungswiderstandes in Stromrichtung linear ab und
2. infolge der Erdanziehung von oben nach unten linear zu

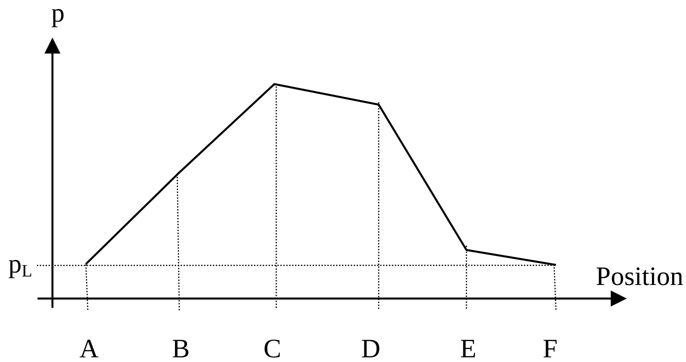
Beispiel 1



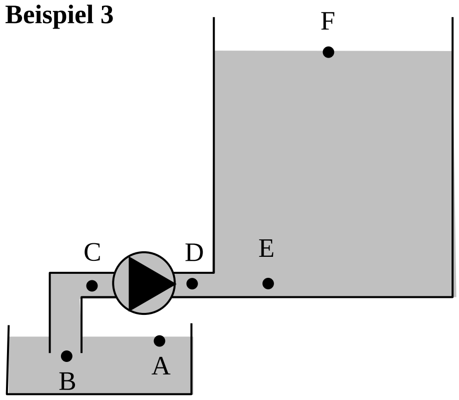


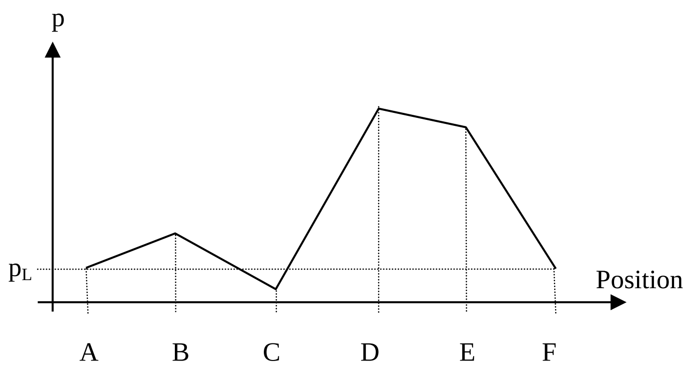
Beispiel 2



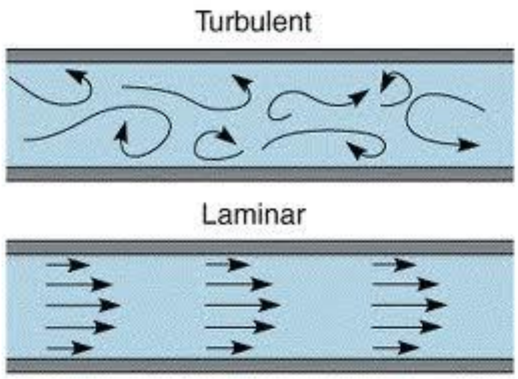


Beispiel 3





2.4.8. Laminare und turbulente Strömungen



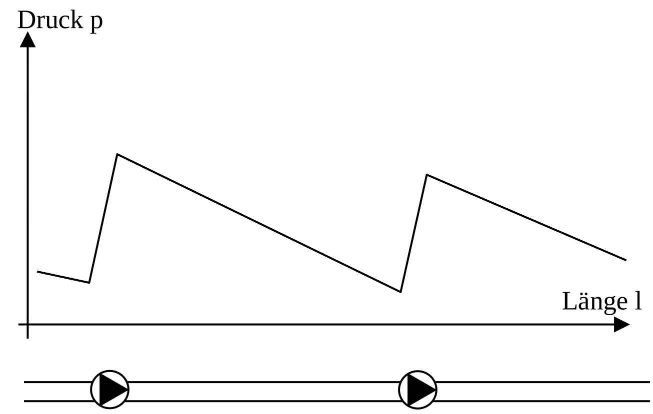
In **langsam** strömenden Flüssigkeiten und Gasen bewegen sich die Teilchen in geordneten, aufeinander gleitenden Schichten. In solch einer **laminar** strömenden Flüssigkeit wird der **Reibungswiderstand** der Begrenzungsflächen gleichmässig von einer Schicht auf die nächste übertragen. Die Strömungsgeschwindigkeit der Schichten nimmt daher vom Rand in die Mitte hin zu.
In **schnell** strömenden Flüssigkeiten bilden sich Turbulenzen (**Wirbel**). In solch einer **turbulenten** Strömung sind die Wirbel selbst die Hauptursache für den Strömungswiderstand.
Übungen: Aufgaben zur Hydraulik Nr. 10 -

2.4.9. Laminare Strömung in einem runden Rohr

Für einen **laminaren Volumenstrom** $\dot{V}$ einer Flüssigkeit mit der **Viskosität η** in einem **rundes** Rohr mit **Radius r** nimmt der Druck **auf der Länge Δl** um $\Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot \dot{V} \cdot \Delta l}{\pi \cdot r^4}$ ab. Die Viskosität η ist ein Maß für die **Zähigkeit** der Flüssigkeit. **Beispiele** für Viskositätswerte sind

Wasser bei 20°C:	0,001 Pa·s
Blut bei 37°C:	0,004 Pa·s
Olivenöl bei 20 °C:	0,084 Pa·s
Motoröl SAE 10 bei 30°C:	0,200 Pa·s

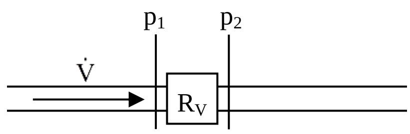
Übung: skizziere den Druckverlauf für halben und doppelten Volumenstrom $\dot{V}$



Druckverlauf in einem langen Rohr mit Pumpen

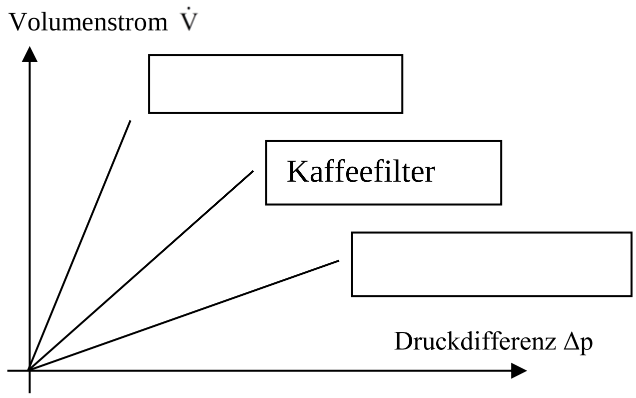
2.4.10. Hydraulischer Widerstand

In Anlehnung an den **elektrischen Widerstand** $R = \frac{U}{I}$ definiert man den **hydraulischen Widerstand** $R_V = \frac{\Delta p}{\dot{V}}$ mit der Einheit $\left[R_V\right] = \frac{[\Delta p]}{[\dot{V}]} = \frac{Pa}{\frac{m^3}{s}} = \frac{Pa \cdot s}{m^3}$. Typische Widerstandswerte sind



Sandfilter:	10^5 Pa·s/m^3
Kaffeefilter:	10^7 Pa·s/m^3
Espressomaschine:	10^{10} Pa·s/m^3

Übung: Ordne die beiden übrigen Kennlinien dem Sandfilter und der Espressomaschine zu.



Für eine laminare Strömung ist $R_V = \frac{8 \cdot \eta \cdot \Delta l}{\pi \cdot r^4}$. Der hydraulische Widerstand ist also proportional zur Viskosität und zur Rohrlänge aber antiproportional zur 4. Potenz des Rohrradius: Ein **doppelt so langes** Rohr hat auch den **doppelten** Widerstand. Ein **doppelt so breites** Rohr hat aber nur noch den **sechzehnten Teil** des Widerstandes!

Übungen: Aufgaben zur Hydraulik Nr. 15 -