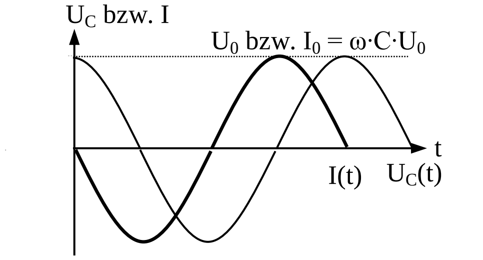
3.5. Wechselstromtechnik

3.5.1. Zeigerdiagramme

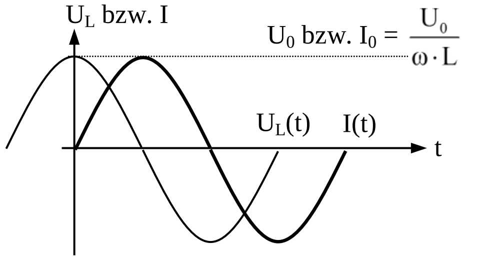
3.5.1.1. Wechselspannung an einem Kondensator



Bei einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ an einem Kondensator mit der Kapazität C ist die
Ladung $Q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und die
Stromstärke $I(t) = Q'(t) = -\omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \sin(\omega t) = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t + 90°)$.

Der Strom läuft um einen Phasenwinkel von φ = 90° voraus.

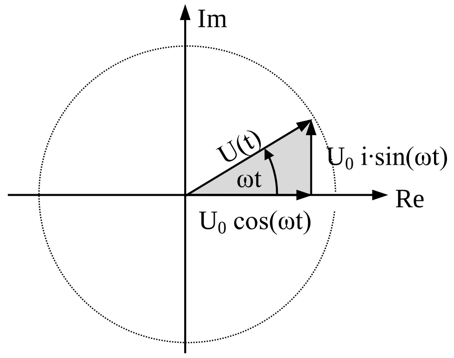
3.5.1.2. Wechselspannung an einer Spule



Bei einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ an einer Spule mit der Induktivität L ist wegen $U_L = L \cdot \dot{I}$ die
Änderungsrate der Stromstärke $I'(t) = \frac{U(t)}{L} = \frac{U_0}{L} \cdot \cos(\omega t)$ mit der
Stromstärke $I(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \cos(\omega t - 90°)$.

Der Strom läuft um einen Phasenwinkel von φ = 90° hinterher.

3.5.1.3. Zeigerdiagramm



In Parallel- bzw. Reihenschaltungen müssen Ströme bzw. Spannungen addiert werden. Für Widerstände und Leitwerte müssen sie dividiert werden. Da dies mit phasenverschobenen Sinusfunktionen sehr mühselig ist, stellt man Ströme und Spannungen als umlaufende Zeiger in der **komplexen Zahlenebene** dar.
Die Spannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ ist dann der **Realteil** des mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω gegen den Uhrzeigersinn umlaufenden **Zeigers**

$$\boxed{U(t) = U_0 \cdot [\cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)]}$$

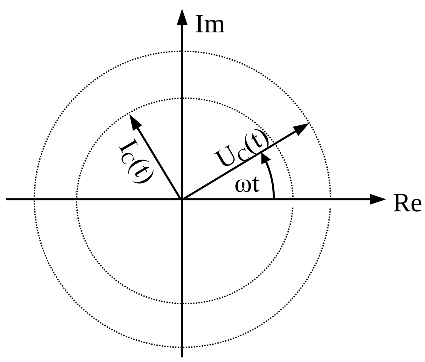
Mit der **Eulerschen Identität** $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ erhält man die **Polarform**

$$\boxed{U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}}$$

Übungen. Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 1

3.5.2. Komplexwertige Widerstände und Leitwerte

Die komplexwertigen Widerstände werden als **Impedanzen** (*lat. impedere = hindern*) mit dem Buchstaben Z bezeichnet. Ihre Kehrwerte sind die **Leitwerte** $Y = \frac{1}{Z}$. Man berechnet Sie als Verhältnis $Z = \frac{U(t)}{I(t)}$ mit Hilfe der Polarform:



Für den **Kondensator** mit Kapazität C ist $Q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$ mit der Ableitung $I(t) = Q'(t) = i\omega C \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t} = i\omega C \cdot U(t)$, also

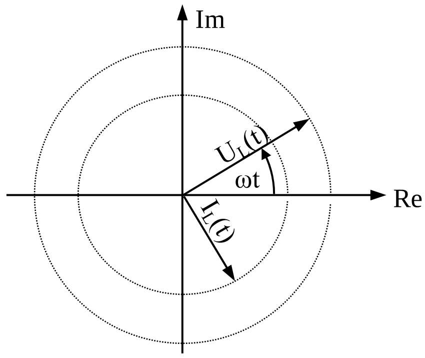
$$\boxed{Z_C = \frac{1}{i\omega C}}.$$

Multiplikation mit $Y_C = i\omega C = \omega C \cdot e^{+i \cdot 90°}$ bewirkt eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn:

Der Strom $I_C = i\omega C \cdot U_C$ läuft voraus.

Für die **Spule** mit Induktivität L ist $I'(t) = \frac{U(t)}{L} = \frac{U_0}{L} \cdot e^{i\omega t}$ mit der Aufleitung $I(t) = \frac{U_0}{i\omega L} \cdot e^{i\omega t} = \frac{U(t)}{i\omega L}$, also

$$\boxed{Z_L = i\omega L}.$$



Multiplikation mit $Y_L = -\frac{i}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} \cdot e^{-i \cdot 90°}$ bewirkt eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn:

$$\boxed{\textbf{Der Strom } I_L = \frac{U_L}{i\omega L} \textbf{ läuft nach}}$$

Imaginäre Impedanzen von Induktivitäten und Kapazitäten heißen auch Blindwiderstände, da sie keine Arbeit leisten: Arbeit wird nämlich nur verrichtet, wenn Ladungen unter Kraftaufwand (Spannung) in Bewegung (Strom) gesetzt werden. Sind Strom und Spannung um 90° phasenverschoben, so schwingen die Ladungen nur hin und her, wobei wie bei einer Schaukel die bei einer Viertelperiode abgegebene Arbeit in der nächsten Viertelperiode gleich wieder aufgenommen wird.

Reelle Impedanzen von ohmschen Widerständen heißen Wirkwiderstände. Sie führen zu einer kontinuierlichen Leistungsabgabe, weil Kraft (Spannung) und Bewegung (Strom) in die gleiche Richtung wirken (gleichphasig sind).

Die gesamte Impedanz mit reellem Wirkanteil und imaginären Blindanteil heißt auch **Scheinwiderstand**.

Übungen. Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 2

3.5.3. Reihenschaltung

Die Impedanzen bzw. Teilspannungen addieren sich und der Strom bleibt gleich.

Beispiel:
Berechne die Stromstärke I_{ges} und die Phasenverschiebung φ für eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes mit R = 4 Ω, eines Kondensators mit C = 3 mF und einer Spule mit L = 20 mH für eine Wechselspannung mit U_0 = 10 V und einer Frequenz f = 40 Hz. Zeichne den **Strom** I_{ges} und die **Gesamtspannung** U_{ges} in ein Zeigerdiagramm. Berechne außerdem die **Teilspannungen** U_R, U_C und U_L sowie die Summe $U_R + U_C + U_L = U_{ges}$ und zeichne sie in ein zweites Zeigerdiagramm

Lösung:
Mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω = 2πf = 80π Hz erhält man

Gesamtimpedanz $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$

$= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

$\approx [4 + i \cdot 3{,}70]\ \Omega$

$\approx 5{,}45 \cdot e^{i42{,}8°}\ \Omega$

Gesamtleitwert $Y = \frac{1}{Z}$

$\approx 0{,}184 \cdot e^{-i42{,}8°}\ \Omega^{-1}$

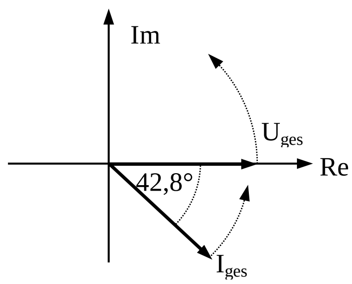
Gesamtstrom $I_{ges} = Y \cdot U$

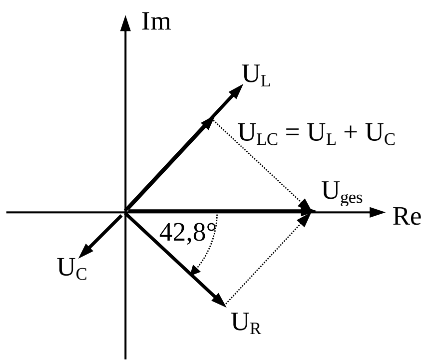
$\approx 1{,}84 \cdot e^{i(\omega t - 42{,}8°)}$ A

Teilspannungen $U_R = R \cdot I_{ges} \approx 7{,}34 \cdot e^{i(\omega t - 42{,}8°)}$ V

$U_C = \frac{I_{ges}}{i\omega C} \approx 2{,}43 \cdot e^{i(\omega t - 42{,}8° - 90°)}$ V

$U_L = i\omega L \cdot I_{ges} \approx 9{,}22 \cdot e^{i(\omega t - 42{,}8° + 90°)}$ V





Die maximale Stromstärke ist I_{ges} ≈ 1,84 A
mit Phasenverschiebung φ ≈ −42,8° (Strom läuft nach).

Übungen. Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 3 und 4

3.5.4. Parallelschaltung

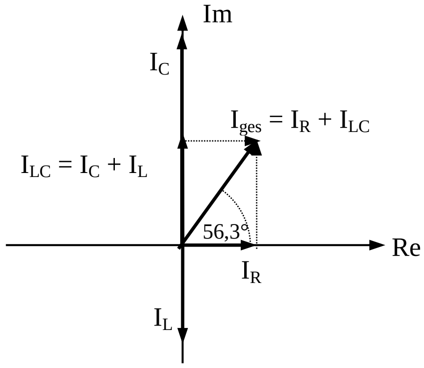
$\boxed{\textbf{Die Leitwerte bzw. Zweigströme addieren sich und die Spannung bleibt gleich.}}$

Beispiel:

Berechne die **Zweigströme** I_R, I_C und I_L sowie den **Gesamtstrom** $I_{ges} = I_R + I_C + I_L$ und die Phasenverschiebung φ für eine Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes mit R = 5 Ω, eines Kondensators mit C = 3 mF und einer Spule mit L = 20 mH für eine Wechselspannung mit U_0 = 5 V und einer Frequenz f = 30 Hz. Zeichne die Zweigströme und den Gesamtstrom in ein Zeigerdiagramm.

Lösung:

Mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω = 2πf = 60π Hz erhält man



Gesamtleitwert $Y = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$

$= \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

$\approx [0{,}2 + i\cdot 0{,}3]\ \Omega^{-1}$

$\approx 0{,}361\cdot e^{i56{,}3°}\ \Omega^{-1}$

Gesamtimpedanz $Z = \frac{1}{Y}$

$\approx 2{,}77\cdot e^{-i56{,}3°}\ \Omega$

Gesamtstrom $I_{ges} = Y\cdot U$

$\approx 1{,}85\cdot e^{i(\omega t + 56{,}3°)}$ A

Zweigströme $I_R = \frac{U}{R} = 1\cdot e^{i\omega t}$ A

$I_C = i\omega C\cdot U \approx 2{,}83\cdot e^{i(\omega t + 90°)}$ A

$I_L = \frac{U}{i\omega L} \approx 1{,}33\cdot e^{i(\omega t - 90°)}$ A

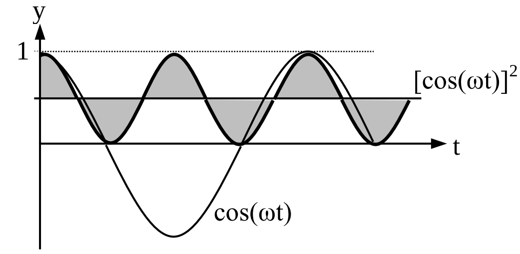
Die maximale Gesamtstromstärke ist I_{ges} ≈ 1,85 A
mit Phasenverschiebung φ ≈ 56,3° (Strom läuft vor).

Übungen: Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 5 - 7

3.5.5. Leistung und Effektivwerte

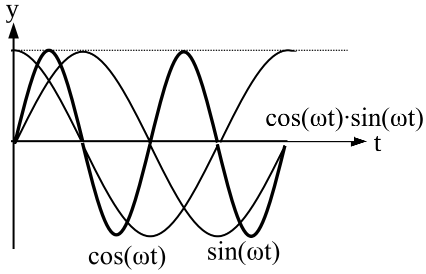
Nur die **Realteile** von Strom und Spannung fließen wirklich durch die Leitung und liefern eine **Leistung**. Mit der **Phasenverschiebung** φ und mit Hilfe eines **Additionstheorems** cos(ωt + φ) = cos(ωt)·cos(φ) – sin(ωt)·sin(φ) erhält man

$P(t) = U_0\cdot\cos(\omega t)\cdot I_0\cdot\cos(\omega t + \varphi)$
$= U_0\cdot I_0\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t + \varphi)$
$= U_0\cdot I_0\cdot\cos(\omega t)\cdot[\cos(\omega t)\cdot\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\cdot\sin(\varphi)]$
$= U_0\cdot I_0\cdot[\cos(\omega t)]^2\cdot\cos(\varphi) + U_0\cdot I_0\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin(\omega t)\cdot\sin(\varphi)$



Die **Scheinleistung** P ist der zeitliche Mittelwert dieser Leistung.

Der Anteil $[\cos(\omega t)]^2$ hat den Mittelwert $\frac{1}{2}$ und bewirkt die



$\boxed{\textbf{Wirkleistung}\ P_W = \frac{1}{2}U_0\cdot I_0\cdot\cos(\varphi) = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)}$ mit den

$\boxed{\textbf{Effektivwerten}\ U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \text{ und } I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$ und dem

$\boxed{\textbf{Leistungsfaktor}\ \cos(\varphi)}$

Wie in 3.5.2. schon erwähnt, kann nur die Komponente I(t)·cos(φ) des Gesamtstromes I(t), die in Phase mit der Spannung U(t) ist, Arbeit leisten. Nur diese Wirkleistung $P_W = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\cos(\varphi)$ wandelt kontinuierlich elektrische Leistung in **mechanische oder Wärmeleistung** um. Sie ist maximal, wenn die **Phasenverschiebung** φ = 0° ist und minimal, wenn sie 90° ist.

Der Anteil $\cos(\omega t)\cdot\sin(\omega t)\cdot$hat den Mittelwert 0 und erzeugt eine **Blindleistung $P_B = U_{eff}\cdot I_{eff}\cdot\sin(\varphi)$,** die wie bei einer **Schwingung** in jeder Viertelperiode aufgenommen und wieder abgegeben wird. Sie lässt sich im üblichen Dauerbetrieb nicht nutzen, belastet jedoch die Generatoren, weil der Wirkwiderstand der Ankerwicklungen unabhängig von der Phasenverschiebung zu Wirkleistung und damit zu beträchtlichen Wärmeverlusten und -Schäden führen kann. Daher wird der Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ bei Großverbrauchern gemessen und bei zu hohen Werten mit Zusatzgebühren durch das Elektrizitätswerk bestraft. Industrielle Großverbraucher müssen die Phasenverschiebung durch den Einbau von passenden **Kondensatoren** kompensieren.

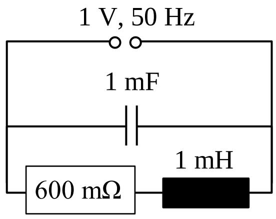
Übungen: Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 8 - 11

3.5.6. Die Frequenzabhängigkeit der Impedanz: Filtertechnik

Die Funk- und Audiotechnik insbesondere in Mobiltelefonen beruht auf der Frequenzabhängigkeit der Impedanzen. Störende Frequenzen wie z.B. Rauschen lassen sich durch einfache Schaltungen herausfiltern; signaltragende Frequenzen dagegen verstärken.

Beispiel:

a) Berechne den gesamten Scheinwiderstand Z und die Phasenverschiebung φ für die nebenstehende Schaltung bei U = 1 V und f = 50 Hz
b) Bei welcher Frequenz f_0 verschwindet der Blindwiderstand und wie groß ist dann der Wirkwiderstand?
c) Zeichne jeweils ein Zeigerdiagramm für die Zweigströme bei den Frequenzen f und f_0.
d) Warum bezeichnet man eine solche LC-Reihenschaltung als Frequenzfilter bzw. Sperrkreis. Was wird gesperrt und was wird durchgelassen?



Lösungen

a) Rechter Zweig: $Z_{LR} = R + i\omega L = (0{,}6 + 0{,}1\pi i)\ \Omega \approx 0{,}677\cdot e^{i27{,}6°}\ \Omega$

$Y_{LR} = \dfrac{1}{Z_{LR}} \approx 1{,}477\cdot e^{-i27{,}6°}\ \Omega^{-1} \approx (1{,}31 - 0{,}68)\ \Omega^{-1}.$

Gesamt: $Y_{ges} = i\omega C + Y_{LR} \approx (1{,}31 - i0{,}37)\ \Omega^{-1} \approx 1{,}36\cdot e^{-i15{,}8°}\ \Omega^{-1}$

$Z_{ges} = \dfrac{1}{Y_{ges}} \approx 0{,}736\cdot e^{i15{,}8°}\ \Omega^{-1}$ mit Phasenverschiebung $\varphi \approx -15{,}8°$ (Strom läuft nach)

b) Der Blindwiderstand $X_{ges} = \mathrm{Im}(Z_{ges})$ verschwindet genau dann, wenn auch der Imaginärteil $\mathrm{Im}(Y_{ges})$ des Leitwertes

$Y_{ges}(\omega) = i\omega C + \dfrac{1}{R + i\omega L} = \dfrac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C - \dfrac{i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$ verschwindet.

Aus $\mathrm{Im}(Y_{ges}) = 0 \Leftrightarrow C - \dfrac{L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = 0 \Leftrightarrow CR^2 + \omega_0^2 L^2 C - L = 0$

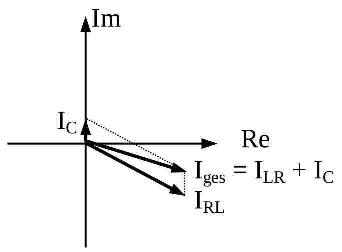
erhält man die Lösung $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}} = 800\ s^{-1}$ bzw. die Frequenz $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \approx 127{,}3$ Hz

mit dem Wirkwiderstand $\mathrm{Re}(Z_{ges}) = \dfrac{R^2 - \omega_0^2 L^2}{R} = \dfrac{L}{CR} = \dfrac{5}{3}\ \Omega.$

c) Zeigerdiagramm für f = 50 Hz:

$I_C = i\omega C\cdot U \approx 0{,}31i$ A

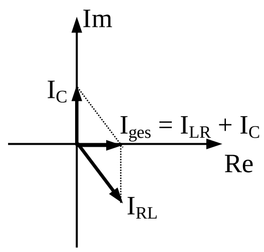
$I_{RL} = Y_{LR}\cdot U \approx 1{,}48\cdot e^{-i27{,}6°}$ A



Zeigerdiagramm für f_0 = 127,3 Hz:

$I_C = i\omega_0 C\cdot U \approx 0{,}8i$ A

$I_{LR} = Y_{LR}(\omega_0)\cdot U = (0{,}6 - i0{,}8)\ \Omega^{-1}\cdot 1\ V \approx 1\cdot e^{-i53{,}1°}$ A



d) Bei der Sperrfrequenz f_0 kompensieren sich die beiden Blindleitwerte $i\omega C$ und $\dfrac{1}{i\omega L}$: Der Gesamtleitwert Y_{ges} wird minimal und die Gesamtimpedanz Z_{ges} wird maximal. Die Frequenz f_0 wird schlechter durchgelassen als alle anderen bzw. „gesperrt".

Übungen. Aufgaben zur Wechselstromtechnik Nr. 12 - 14