4.1. Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: Geschwindigkeit
Papis neuer Elektro-SUV wiegt 2 Tonnen, aber der Strom kommt aus der Steckdose und man lebt nur einmal.
a) In wie vielen Minuten ist Ben bei 120 km/h die 10 km nach Schömberg zur Sportsbar gefahren?
b) Beim Zocken hat Ben ganz vergessen, dass sein Kumpel Shawn im 20 km entfernten Pforzheim die neue Wetflix-Staffel von „Kill me gently“ mit ihm sehen wollte. Ben muss in 24 Minuten da sein, sonst regt sich Shawn auf und seine weißen Sneaker werden schmutzig. Wie schnell muss Ben fahren?

Aufgabe 2: Beschleunigungskräfte
Der rosa Autozug der ÖBB fährt die Italienurlauber durch den Tauerntunnel zurück nach Deutschland.
a) Wie viele 2-Tonnen-Elektro-SUVs kann der Anhänger tragen, wenn das mittlere Schild das zulässige Gesamtgewicht anzeigt?
b) Welche Beschleunigung wird bei unbeladenem bzw. bei voll beladenem Zug erreicht, wenn die Lok mit maximal zulässiger Kupplungslast zieht?

Lokführer Franzl sitzt heute zum ersten Mal im neuen Siemens „Dominator“ und geht wie von seiner alten ÖBB 1144 gewohnt im 1% - Anstieg der Südrampe auf volle Leistung. Die Kupplung bricht sauber und der voll beladene Zug rollt sanft zurück in Richtung Süden.
c) Begründe mit Hilfe einer Skizze, dass die Hangabtriebskraft des voll beladenen Wagens ca. 2700 N beträgt. **Hinweis**: Eine Steigung von 1% bedeutet 1 m Höhendifferenz auf 100 m Strecke und für kleine Winkel α gilt $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$
d) Berechne die Beschleunigung des abrollenden Zuges.

Franzl bemerkt nach 5 Sekunden, dass der Zug nicht mehr da ist, bringt die Lok nach 100 m Fahrweg zum Stehen, wechselt schnell den Führerstand und ist in weiteren 5 Sekunden in Gegenrichtung unterwegs. Der „Dominator“ wird auch als Intercitylok verkauft und schafft im „sportiv mode“ eine Beschleunigung von 1,1 m/s^2.
e) Zeige, dass er den Zug nach $1+\sqrt{211} \approx 15{,}5$ weiteren Sekunden einholt. **Hinweis**: Ein mit der Beschleunigung a am Ort x_0 zur Zeit t_0 gestartetes Fahrzeug hat zur Zeit t eine Strecke von $x(t) = 0{,}5a(t - t_0)^2 + x_0$ zurückgelegt.

f) Zeige, dass die Lok den Zug nach ca. 735 Metern einholt. Welche Strecke hat der Zug in dieser Zeit zurückgelegt?
g) Zeige, dass die Lok den Zug mit ca. 60,5 km/h erreicht und der Zug zum Zeitpunkt des Aufeinandertreffens bereits 9,1 km/h schnell ist.
h) Was muss Franzl jetzt tun, um Papis SUV und seine Insassen zu retten?. Betrachte das untere rechte Bild. Was ist darauf zu sehen?

Aufgabe 3: Federkräfte
Berechne die Federkonstante D und die Schwingungsdauer T für eine Feder, die durch einen angehängten Körper der Masse m = 20 g um Δs = 10 cm verlängert wird. Rechne mit g = 10 m/s^2

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung
Steigert man die an eine Feder gehängte Masse von 300 g auf 500 g, so verlängert sie sich um 8 cm. Berechne die Schwingungsdauer für einen 1 kg schweren Körper.

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung
Welche Masse muss an eine Feder mit D = 10 $N \cdot m^{-1}$ gehängt werden, damit sie mit der Periodendauer T = $\pi/2$ schwingt?

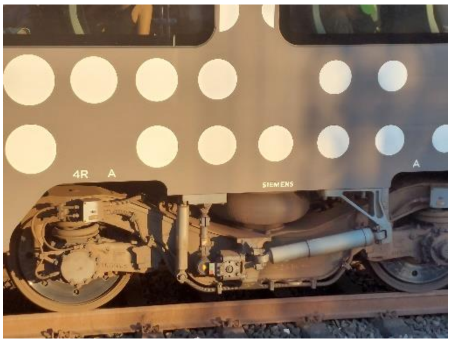
Aufgabe 6: ungedämpfte Federschwingung
Ein 300 g schwerer Körper schwingt an einer Schraubenfeder mit der Amplitude x_0 = 12 cm und der Periodendauer T = $\pi/2$ s.
a) Berechne die Federkonstante D der Feder.
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
c) Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 7: ungedämpfte Federschwingung

Ein 50 g schwerer Körper wird an einer Schraubenfeder mit $D = 6\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ um 10 cm aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und dann losgelassen.

a) Berechne die für die Auslenkung notwendige Kraft und die Schwingungsdauer.
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?
c) Wie groß ist die Beschleunigung a beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage und bei der größten Auslenkung?

Aufgabe 8: gedämpfte Federschwingung



Ein 100g schwerer Körper an einer Feder mit $D = 10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ und Reibungsfaktor $k = 0{,}02\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ wird um $x_0 = 10$ cm ausgelenkt und losgelassen.

a) Berechne die Periodendauer T und die Halbwertszeit $t_{1/2}$ der Schwingung.
b) Nach wie vielen Schwingungen hat sich die Auslenkung halbiert?
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim ersten Durchgang durch die Gleichgewichtslage?

Aufgabe 9: gedämpfte Federschwingung

Ein 200 g schwerer Körper schwingt an einer Feder mit der Periodendauer T = 1 s und der Halbwertszeit $t_{1/2} = 5$ s. Berechne die Federkonstante D und den Reibungsfaktor k der Feder.

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel

Bestimme die Schwingungsdauer T und die Anzahl der Schwingungen pro Minute, die eine kleine schwere Kugel an einem 5 m langen Faden im Schwerefeld der Erde mit $g \approx 10\ \text{m/s}^2$ ausführt.

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel

An einem Ort herrschte die Gravitationsfeldstärke $g = 9{,}82\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

a) Welche Länge l_1 muss ein Pendel haben, das an diesem Ort in zwei Sekunden eines Schwingung ausführt?
b) Welche Länge l_2 muss es haben, wenn die Schwingungsdauer $T_2 = 1$ s betragen soll?

Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel

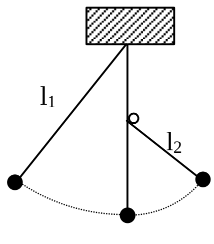
Zur Bestimmung der Gravitationsfeldstärke bzw. der Masse des Mondes wird die Schwingungsdauer $T_1 = 3$ s eins Fadenpendels bestimmt. Nach Verlängerung um $\Delta l = 1{,}11$ m verdoppelt sich die Schwingungsdauer auf $T_2 = 6$ s. Wie lang waren die beiden Pendel und wie groß ist die Gravitationsfeldstärke auf dem Mond?

Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel

Je weiter man ein Pendel aus seiner Ruhelage auslenkt, desto stärker weicht die Periodendauer vom Idealwert $T = 2\pi\sqrt{\pi/2}$ ab.

a) Bestimme und vergleiche die Periodendauern T_1 und T_2 bei einem einfachen Fadenpendel mit Hilfe eines Fadens mit Gewicht, Stoppuhr und Stativ bei Auslenkungen von $\alpha_1 \approx 10°$ und $\alpha_2 \approx 90°$. Führe jeweils 3 Messungen durch, bestimme den Mittelwert und vergleiche mit dem berechnete Idealwert $T = 2\pi\sqrt{\pi/2}$.
b) Die ideale Periodendauer setzt voraus, dass die Rückstellkraft F_r proportional zur Auslenkung ist. Theoretisch könnte die Rückstellkraft bei unendlicher Auslenkung also unendlich groß werden, wenn das System nicht vorher zerstört wird. Anders bei einem Pendel. Wie groß ist die maximale Rückstellkraft F_r bei einem Pendel und in welcher Stellung α wird sie erreicht? Skizziere diese Stellung und die zeichne die Rückstellkraft an den Stellungen $\alpha_0 = 0°$, $\alpha_1 \approx 10°$ und $\alpha_2 \approx 90°$ ein.
c) Skizziere den tatsächlichen und den idealisierten (proportionalen) Verlauf der Rückstellkraft F_r über die Auslenkung α in ein Diagramm.
d) Begründe nun die Abweichung der gemessenen Periodendauer bei großen Auslenkungen vom Idealwert. Welche Konsequenzen ergeben sich für die Sicherheit von Schaukeln auf Kinderspielplätzen?

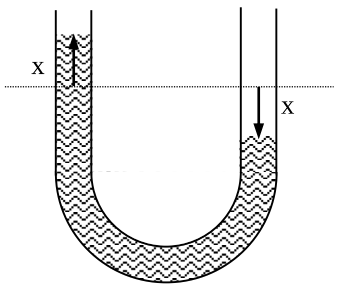
Aufgabe 14: ungedämpftes Pendel



Beim Galileischen Rückhaltependel wird eine Stativstange so angebrachte, dass das Pendel auf der linken Seite $l_1 = 250$ cm, auf der rechten Seite aber nur noch $l_2 = 160$ cm zu Verfügung hat.

a) Das Pendel wird so ausgelenkt, dass es links die Höhe h über der Ruhelage erreicht. Welche Höhe erreicht es dann auf der rechten Seite? Begründe.
b) Berechne die mittlere Periodendauer des Pendels für $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$.

Aufgabe 15: ungedämpftes Pendel



In ein U-Rohr mit dem konstanten Querschnitt $A = 6{,}5\ \text{cm}^2$ werden $V = 400\ \text{cm}^3$ Wasser gefüllt und durch Schwenken in eine Schwingung versetzt. Zeige, dass der Flüssigkeitsstand der Wassersäule sich durch $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t)$ beschreiben lässt und bestimme die Periodendauer T.

Aufgabe 16: Schwingkreis
Welche Eigenfrequenz f_0 hat ein Schwingkreis aus einem Kondensator der Kapazität C = 200 pF und einer Spule mit der Induktivität L = 10 µH?

Aufgabe 17: Schwingkreis
Ein Antennenschwingkreis besteht aus einer Spule mit L = 800 µH und einem stufenlos regelbaren „Trimmerkondensator“, der in Verbindung mit der Antenne Kapazitäten von 2 bis 50 pF erreicht. Welcher Frequenzbereich kann mit diesem Sender abgedeckt werden?

Aufgabe 18: Schwingkreis
Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C sowie einem zweiten „Trimmerkondensator“, der parallel zum ersten Kondensator geschaltete ist und dessen Kapazität zwischen 10 pF und 100 pF stufenlos eingestellt werden kann. Welche Werte müssen L und C haben, damit man mit diesem Schwingkreis Frequenzen zwischen f_1 = 300 kHz und f_2 = 100 kHz erzeugen kann?

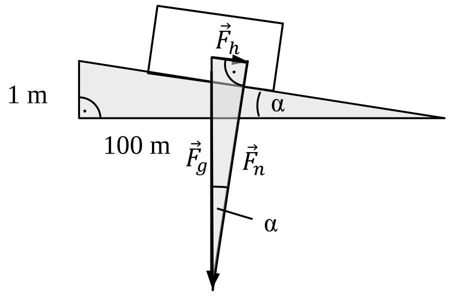
4.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Schwingungen

Aufgabe 1: Geschwindigkeit

a) Er hat $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{10km}{120km/h} = \frac{10km}{2km/min} = 5$ min benötigt

b) Seine Geschwindigkeit muss $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20km}{24min} = \frac{5km}{6min} = \frac{50km}{60min} = 50$ km/h betragen.

Aufgabe 2: Beschleunigungskräfte



a) Die zulässige Nutzlast von 27 t – 9 t = 18 t reicht für 9 SUVs.

b) Die maximale Beschleunigung ist beladen $a = \frac{F}{m} \approx 0{,}378\ \frac{m}{s^2}$ und unbeladen $a = \frac{F}{m} \approx 1{,}13\ \frac{m}{s^2}$.

c) Aus der Ähnlichkeit der beiden getönten Dreiecke mit gleichen Winkeln α folgt für kleine Winkel $\frac{F_h}{F_g} = \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{1}{100}$ also $F_h \approx \frac{1}{100} \cdot F_g = \frac{1}{100} \cdot mg = 2{,}7$ kN.

d) Die Beschleunigung ist $a = \frac{F_h}{m} \approx 0{,}1\ \frac{m}{s^2}$

e) Die Lok folgt dem Zug $x_z(t) = 0{,}05 \cdot t^2$ mit einem Rückstand von 100 m und einer Verspätung von 10 s, also mit $x_L(t) = 0{,}55(t – 10)^2$ -·100 = $0{,}55t^2 – 11t – 55$. Sie holt ihn ein zur Zeit t mit $x_z(t) = x_L(t)$, also für $0{,}5t^2 - 11t - 55 = 0$ bzw. $t_{1/2} = 11 \pm \sqrt{121 + 110}$.

f) Relevant ist der Zeitpunkt $t_2 = 11 + \sqrt{231} \approx 25{,}2$ s mit dem Ort $x_z(25{,}2) \approx 0{,}05 \cdot t^2 \approx 635{,}0$ m und der Geschwindigkeit $v_z(25{,}2) = a_z \cdot t \approx 2{,}52$ m/s = 9,1 km/h des Zuges und $v_L(15{,}2) = a \cdot (t – t_0) \approx 1{,}1 \cdot 15{,}2 \approx 16{,}7$ m/s = 60,2 km/h für die Lok.

g) Franzl muss erst auf 9 km/h abbremsen, dann wie James Bond zum Zug herüberspringen und die mechanische Handbremse im Zug betätigen. Noch besser wäre es, wenn einer der Insassen auf die Idee käme.

Aufgabe 3: ungedämpfte Federschwingung $D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{mg}{\Delta s} = 2\ \frac{N}{m}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{5}$ s ≈ 0,63 s

Aufgabe 4: ungedämpfte Federschwingung $D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = 25\ \frac{N}{m}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{5}$s ≈ 1,26 s

Aufgabe 5: ungedämpfte Federschwingung $m = \frac{D \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ s

Aufgabe 6: ungedämpfte Federschwingung

a) $D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} = 4{,}8\ \frac{N}{m}$

b) $v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow v(0) = 0$ und $v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = -0{,}48\ \frac{m}{s}$

oder mit Energieerhaltung: $E_{kin}\left(\frac{T}{4}\right) = E_{pot}(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Dx_0^2 \Rightarrow v = \pm x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$.

c) $a(t) = \dot{v}(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow a(0) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot = -1{,}92\ \frac{m}{s^2}$ und $a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$

Aufgabe 7: ungedämpfte Federschwingung

a) $\Delta F = D \cdot \Delta s = 0{,}6$ N und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0{,}57$ s

b) $v(0) = 0$ und $v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot = -x_0 \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = -1{,}10\ \frac{m}{s}$ oder mit Energieerhaltung.

c) $a(0) = -x_0 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot = -x_0 \cdot \frac{D}{m} \cdot = -12\ \frac{m}{s^2}$ und $a\left(\frac{T}{4}\right) = 0$

Aufgabe 8: gedämpfte Federschwingung

a) **Dämpfungsfaktor** $\delta = -\frac{k}{2m} = 0{,}1\ s^{-1} \Rightarrow$ **Halbwertszeit** $t_{1/2} = \frac{ln(2)}{\delta} \approx 6{,}9$ s

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \approx 10\ s^{-1} \Rightarrow$ **Periodendauer** $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0{,}63$ s.

b) Die Auslenkung halbiert sich nach $\frac{t_{1/2}}{T} \approx 11$ Schwingungen.

c) Mit der Ketten- und Produktregel erhält man $v(t) = \dot{x}(t) = (x_0 \cdot e^{\delta t} \cdot \cos(\omega t))' = x_0 \cdot e^{\delta t} \cdot [\delta \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega t)] \Rightarrow v\left(\frac{T}{4}\right) = -x_0 \cdot e^{\frac{\delta \cdot T}{4}} \cdot \omega \approx -x_0 \cdot \omega \approx -1\ \frac{m}{s}$.

Aufgabe 9: gedämpfte Federschwingung

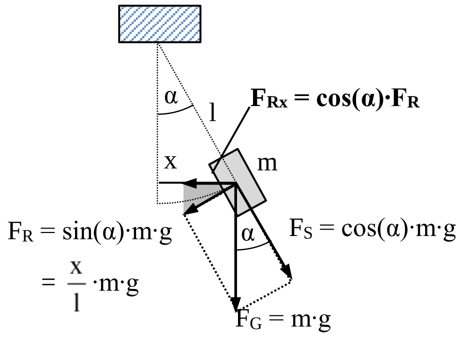
Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{ln(2)}{-t_{1/2}} \approx -0{,}138\ s^{-1} \Rightarrow$ **Reibungsfaktor** $k = -2 \cdot m \cdot k \approx 0{,}055\ kg \cdot s^{-1}$.

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ s^{-1}$. Aus $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}$ folgt $D = m(\omega^2 + \delta^2) \approx 7{,}9\ \frac{N}{m}$.

Aufgabe 10: ungedämpftes Pendel $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 4{,}44\ s \Rightarrow$ 13,5 Schwingungen pro Minute.

Aufgabe 11: ungedämpftes Pendel a) $l_1 = \frac{T_1^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0{,}995$ m b) $l_2 = \frac{T_2^2 \cdot g}{4\pi^2} \approx 0{,}249$ m

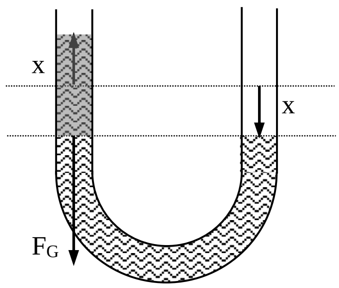
Aufgabe 12: ungedämpftes Pendel
Aus $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ erhält man durch Division $\frac{l_2}{l_1} = \frac{T_2^2}{T_1^2} = 4$. Das erste Pendel war also $l_1 = \frac{1}{3}\Delta l = 0{,}37$ m lang und das zweite $l_2 = \frac{4}{3}\Delta l = 1{,}48$ m. Die Gravitationsfeldstärke ist $g = \frac{4\pi^2 \cdot l_2}{T_2^2} \approx 1{,}62\ \frac{m}{s^2}$.



Aufgabe 13: ungedämpftes Pendel
a) $F_{Rx} = \cos(\alpha) \cdot F_R = \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot mg$ (siehe Zeichnung)
b) $\lim_{\alpha \to 90°} F_{Rx} = 0$, da $\lim_{\alpha \to 90°} \cos(\alpha) = \cos(90°) = 0$
c) Da die Rückstellkraft mit zunehmendem α verschwindet, verharrt das Pendel in Wirklichkeit länger bei großen Auslenkungen und die Periodendauer ist länger

Aufgabe 14: ungedämpftes Pendel
a) Aufgrund der Erhaltung der potentiellen Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ erreicht das Pendel rechts die gleiche Höhe wie links.
b) Die Periodendauern sind links $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ und rechts $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ $\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ Rechts kommt das Pendel schneller wieder zurück, weil es einen kürzeren Weg mit der gleichen mittleren Geschwindigkeit zurücklegt. Die mittlere Periodendauer ist also $\frac{T_1 + T_2}{2} \approx 0{,}9\ s^{-1}$.

Aufgabe 15: ungedämpftes Pendel
Bei einer Auslenkung des Flüssigkeitsspiegels um x aus der Ruhelage wirkt als Rückstellkraft die Gravitationskraft $F_G(x) = \Delta m \cdot g$ des überstehenden Teils mit der Masse $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot 2x$ und beschleunigt die Gesamtmasse $m = \rho \cdot V$ in die Gegenrichtung: Mit dem 2. Newtonschen Axiom erhält man $F_G(x) = m \cdot a \Leftrightarrow -\rho \cdot A \cdot 2x(t) \cdot g = \rho \cdot V \cdot \ddot{x}(t) \Leftrightarrow -2A \cdot g \cdot x(t) = V \cdot \ddot{x}(t)$. Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Differentialgleichung $-D \cdot x(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$ der Federschwingung. Man erhält also die entsprechende Lösung $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{2A \cdot g}{V}}$ bzw. der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2V}{A \cdot g}} \approx 3{,}48$ s.



Aufgabe 16: Schwingkreis $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 3{,}56$ MHz

Aufgabe 15: Schwingkreis $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = f_2 = 798\ KHz \le f \le 3{,}98\ MHz = f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$

Aufgabe 16: Schwingkreis
Die Kapazitäten der beiden parallel geschalteten Kondensatoren addieren sich:
$\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_1)}} = f_1$ und $\frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C_2)}} = f_2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_1^2 \cdot (C + C_1)} = L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_2^2 \cdot (C + C_2)}$
$\Leftrightarrow C = \frac{f_1^2 \cdot C_1 - f_2^2 \cdot C_2}{f_1^2 - f_2^2} = 1{,}25$ pF und L = 25 mH.