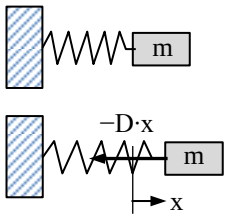
4.1. Schwingungen

4.1.1. Die ungedämpfte Federschwingung



Ein Körper der Masse m hängt im schwerelosen Raum (oder auf einem reibungsfreien Schlitten) an einer Feder mit der Federkonstanten D und wird nun um x_0 aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Aus dem 2. Newtonschen Axiom erhält man die folgende Differentialgleichung für die Ort-Zeit-Funktion x(t):

$$\boxed{-D\cdot x(t) = m\cdot \ddot{x}(t)}$$

Die allgemeine Lösung einer solchen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten findet man mit einem komplexen Exponentialansatz $x(t) = x_0\cdot e^{at}$ mit $a \in \mathbb{C}$. Der Realteil dieser allgemeinen Lösung ist die **Kosinusfunktion**

$$\boxed{x(t) = \hat{x}\cdot\cos(\omega t)}$$

mit **Amplitude** = **Vollausschlag** = **Anfangswert** $\hat{x}$ und **Winkelgeschwindigkeit** ω. Auch ohne Kenntnisse über Differentialgleichungen ist offensichtlich, dass eine Kosinusfunktion sicher gut geeignet ist für die Beschreibung einer periodischen Bewegung, wie sie bei einer solchen Federschwingung beobachtet werden kann. Zur Bestimmung von ω setzen wir den Ansatz $x(t) = \hat{x}\cdot\cos(\omega t)$ in die Differentialgleichung ein:

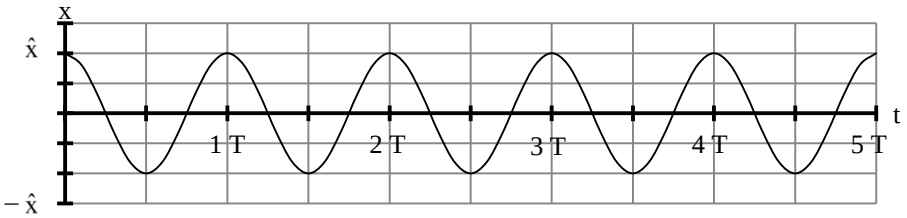
Mit $\dot{x}(t) = -\hat{x}\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$

und $\ddot{x}(t) = -\hat{x}\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t)$

erhält man durch Einsetzen in die obige Differentialgleichung

$$-D\cdot\hat{x}\cdot\cos(\omega t) = -m\cdot\hat{x}\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t)$$
$$D = m\cdot\omega^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

Die Kosinusfunktion beschreibt die **Projektion einer Drehbewegung** auf eine Ebene parallel zur Drehachse, so dass man neben der Winkelgeschwindigkeit auch die **Frequenz** $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und die **Periodendauer** $T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}}$ von der Drehbewegung übernehmen kann:



Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 1 - 5

4.1.2. Die gedämpfte Federschwingung

Bei einer gedämpften Schwingung berücksichtigt man noch die Reibungskraft $F_R(\dot{x}) = -k\,\dot{x}$ in einer zähen Flüssigkeit oder einem gut geschmierten Lager (Newtonsche Reibung bei laminarer Strömung), die proportional zur Geschwindigkeit ist, und erhält die Gleichung $\boxed{-D\cdot x - k\,\dot{x} = m\cdot\ddot{x}(t)}$. Dieses Mal setzen wir den Exponentialansatz $x(t) = \hat{x}\cdot e^{at}$ mit $a \in \mathbb{C}$ gleich in die Differentialgleichung ein:

Mit $\dot{x}(t) = a\cdot\hat{x}\cdot e^{at}$

und $\ddot{x}(t) = a^2\cdot\hat{x}\cdot e^{at}$

erhält man

$$-D\cdot\hat{x}\cdot e^{at} - k\cdot a\cdot\hat{x}\cdot e^{at} = m\cdot a^2\cdot\hat{x}\cdot e^{at} \qquad |:\ \hat{x}\cdot e^{at}$$
$$-D - k\cdot a = m\cdot a^2 \qquad | + D + k\cdot a$$
$$0 = m\cdot a^2 + k\cdot a + D$$

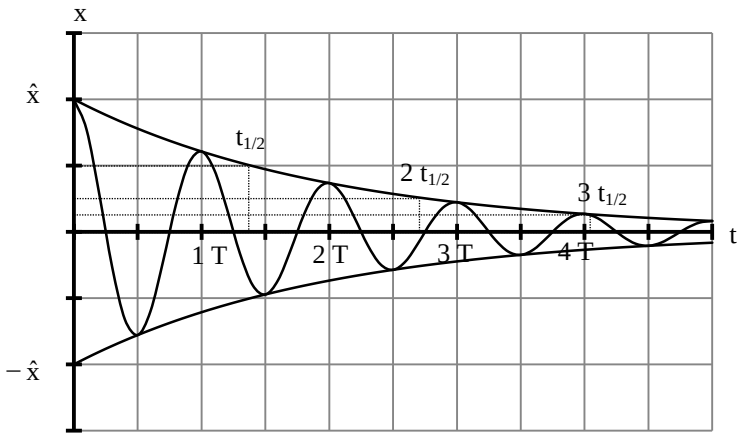
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $a_{1/2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4\cdot m\cdot D}}{2m}$

Für **schwache Dämpfung** mit $k < 2\sqrt{m \cdot D}$ ist der Radikand negativ und die Wurzel imaginär:

$$a_{1/2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{} \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}_{}$$

$$a_{1/2} = -\delta \pm i\omega$$

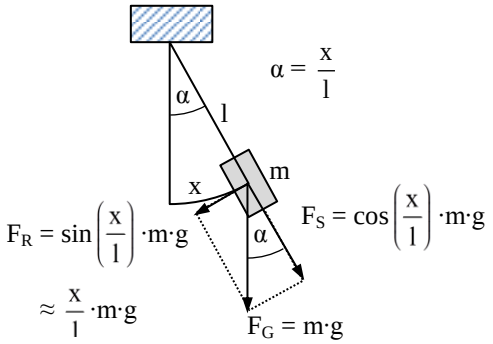
Mit der **Eulerschen Identität** $e^{i\omega} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ erhält man die allgemeine Lösung $x(t) = \hat{x} \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos(\omega t) \pm i \cdot \sin(\omega t)]$. Die tatsächliche Bewegung wird beschrieben durch den **Realteil** $x(t) = \hat{x} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$ mit **Dämpfungsfaktor** $\delta = \frac{k}{2m}$ und **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}$. Die Amplitude nimmt exponentiell ab mit der **Halbwertszeit** $t_{1/2} \boxed{= \frac{\ln(2)}{\delta}:}$



Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 6 und 7

4.1.4. Das mathematische Pendel

Eine Masse m hängt an einem Faden der Länge l und wird um x_0 horizontal aus der Ruhelage ausgelenkt. Nach dem Loslassen schaukelt das Pendel periodisch.



Die **Rückstellkraft** F_R ist die **Komponente der Gewichtskraft** $F_G = m \cdot g$, die senkrecht zur Seilrichtung wirkt.

Für **kleine Winkel** α gilt $\sin(\alpha) \approx \alpha$ und man erhält aus dem 2. Newtonschen Axiom (siehe Skizze) die Differentialgleichung $\boxed{-\frac{x(t)}{l} \cdot m \cdot g = m \cdot \ddot{x}(t)}$.

Sie entspricht der Differentialgleichung der Federschwingung mit $D = \frac{m \cdot g}{l}$.

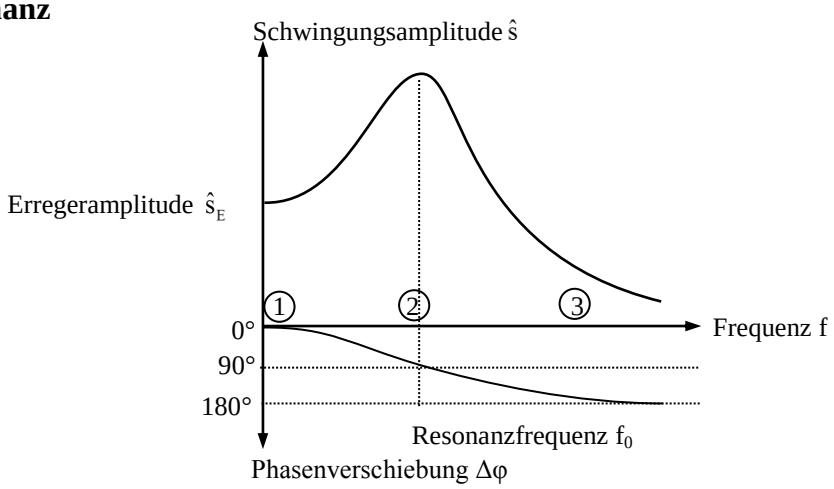
Durch Einsetzen von $D = \frac{m \cdot g}{l}$ in die Lösungen aus 4.1.1. erhält man die **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ und die **Periodendauer** $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ebenso wie die Fallgeschwindigkeit eines Körpers ist auch die Periodendauer eines Pendels unabhängig von der Masse!

Im gedämpften Fall erhält man wieder durch Einsetzen von $D = \frac{m \cdot g}{l}$ in die Lösungen aus 4.1.2. den gleichen **Dämpfungsfaktor** $\delta = \frac{k}{2m}$ und verminderte **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}}$.

Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 8 - 13

4.1.3. Erzwungene Schwingung und Resonanz

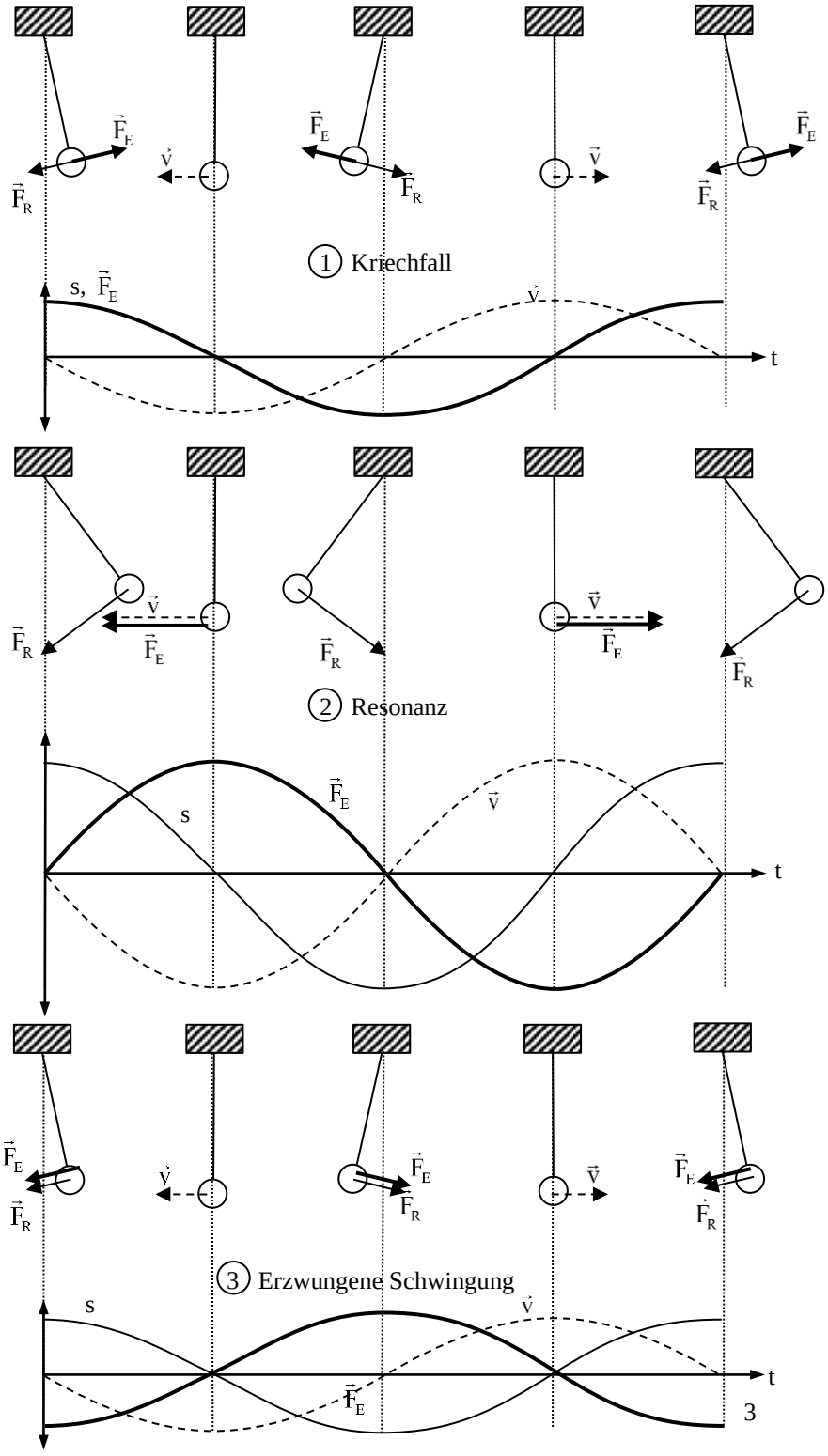


1. Im langsamen **Kriechfall** bei $f_e = f \approx 0$ folgt das schwingende System dem Erreger im **Gleichtakt** mit Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi = 0$ und Amplitude $\hat{s}$ = Erregeramplitude $\hat{s}_e$.
   Die Kraft des Erregers ist annähernd gleich und entgegengesetzt der Rückstellkraft, so dass aufgrund des **Kräftegleichgewichts** keine Beschleunigung stattfindet.
   Die in der der ersten Viertelperiode zugeführte potentielle Energie wird beim Rücklauf während der folgenden Viertelperiode vollständig wieder an den Erreger abgegeben.

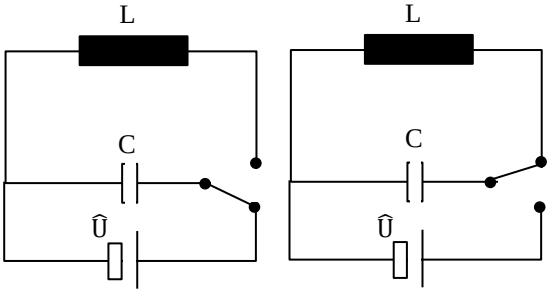
2. Nähert sich die Erregerfrequenz f_e der Eigenfrequenz $f_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$, so bleibt das schwingende System aufgrund seiner **Trägheit** immer weiter hinter dem Erreger zurück und die Phasenverschiebung nähert sich dem Wert $\Delta\varphi = 90°$.
   Bei dieser Phasendifferenz wirkt der Erreger einerseits immer in Bewegungsrichtung und andererseits immer gegen die Rückstellkraft, so dass in jeder Periode sowohl **kinetische** als auch **potentielle** Energie zugeführt werden. Dadurch steigt die Amplitude $\hat{s}$ auf ein **Maximum**, was bei nicht ausreichender Dämpfung zur **Resonanzkatastrophe** führen kann.

3. Steigert sich die Erregerfrequenz weiter, so bleibt das System aufgrund seiner Trägheit immer weiter zurück und die Phasendifferenz strebt gegen $\Delta\varphi = 180°$.
   Der Erreger wirkt zunehmend in Richtung der Rückstellkraft und gegen die Bewegungsrichtung. Die Amplitude $\hat{s}$ nimmt ab und die Eigenschwingung degeneriert zu einer **erzwungenen Schwingung**, wobei sich System und Erreger genau **gegenläufig** zueinander bewegen und der **Rückstellkraft vollständig durch den Erreger ersetzt** wird.

Übungen: Aufgaben zur Resonanz Nr. 1



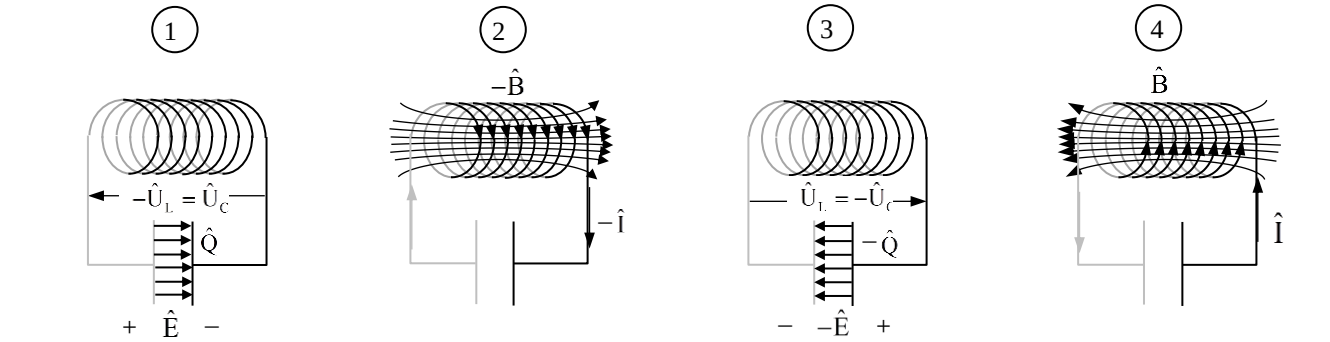
4.1.5. Der ungedämpfte Schwingkreis



Ladevorgang ⓪ Schwingen ① - ④

Zur Vorbereitung wird der Kondensator der Kapazität C in der unteren Schalterstellung ⓪ durch Anlegen der Spannung $\hat{U}$ auf die Ladung $\hat{Q} = C \cdot \hat{U}$ gebracht. Verbindet man ihn nun durch Umlegen des Schalters in die Position ① mit einer Spule der Induktivität L, so schwingen die Ladungen anschließend periodisch hin und her. Nach der **Lenzschen Regel** bremst die Spule zunächst die plötzliche Entladung des Kondensators. Dem Absinken der Stromstärke stellt sie sich aber auch wieder entgegen und lädt den Kondensator in die andere Richtung auf und der Vorgang wiederholt sich in die andere Richtung.

Die Pendelbewegung zwischen Kondensator und Spule lässt sich mit der **Feder-Masse-Schwingung** vergleichen:

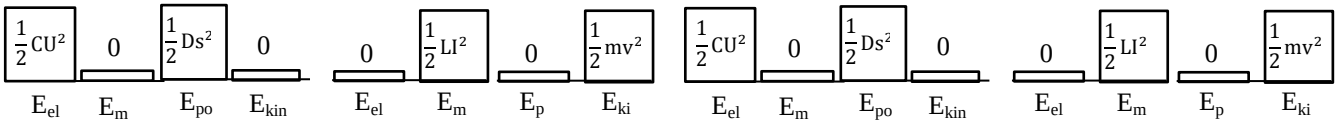


Der geladene Kondensator wird über die Spule kurzgeschlossen

Die Induktivität der Spule treibt den Strom weiter, obwohl der Kondensator längst entladen ist.

Der Kondensator wird durch den Induktionsstrom in Gegenrichtung aufgeladen.

Die Induktivität der Spule treibt den Strom weiter, obwohl der Kondensator längst entladen ist.

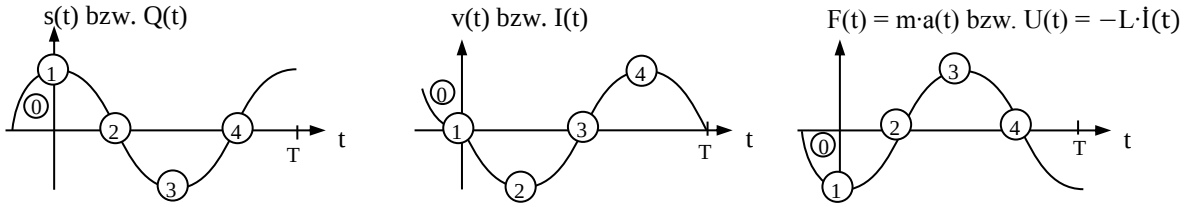


Die gespannte Feder wird losgelassen

Die Trägheit der Masse treibt sie über die Ruhelage hinweg

Die Feder wird durch den Impuls der Masse in Gegenrichtung gespannt.

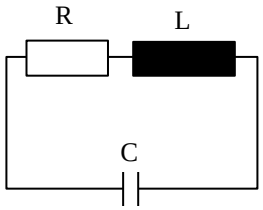
Die Trägheit der Masse treibt sie über die Ruhelage hinweg



Durch die **Addition der Spannungen** erhält man eine **Differentialgleichung** von der gleichen Form wie bei der Federschwingung: $U_L + U_C = 0 \Leftrightarrow L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{Q}(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q(t)}$. Mit dem Ansatz für die **Ladungs-Zeit-Funktion** $Q(t) = \hat{Q} \cdot \cos(\omega t)$ erhält man durch zweimaliges Ableiten zunächst die **Strom-Zeit-Funktion** $\dot{Q}(t) = I(t) = -\hat{Q} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$ und weiter $\ddot{Q}(t) = -\hat{Q} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot Q(t)$. Durch Vergleich bzw. Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man die **Thomsonsche Schwingungsformel** $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ mit dem Spitzenstrom $\hat{I} = \hat{Q} \cdot \omega = \hat{Q} \cdot \sqrt{LC}$

Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 14 - 16

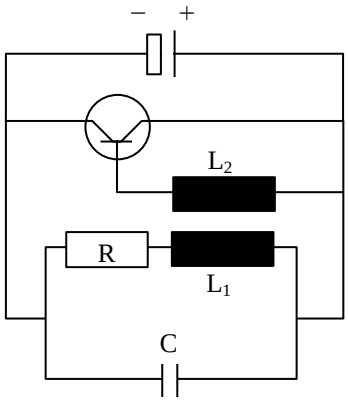
4.1.6. Der gedämpfte Schwingkreis



Durch den unvermeidlichen **ohmschen Widerstand** R der Spule wird der Schwingkreis genauso gedämpft wie die Feder oder das Pendel durch eine zähe Flüssigkeit. Die „Bremsspannung“ U = R·I ist nämlich wieder proportional zur „Geschwindigkeit“ der Ladung I = $\dot{Q}$. Die Addition der Spannungen

$$U_L + U_R + U_C = 0 \Leftrightarrow L\cdot\dot{I} + R\cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \Leftrightarrow \boxed{L\cdot\ddot{Q} + R\cdot\dot{Q} = -\frac{Q}{C}}$$

entspricht wieder der Gleichung für die gedämpfte Federschwingung $-D\cdot s - k\dot{s} = m\cdot\ddot{s}(t)$ mit s(t) = Q(t); m = L; k = R und D = $\frac{1}{C}$. Entsprechend erhält man die Ladungs-Zeit-Funktion $\boxed{Q(t) = \hat{Q}\cdot e^{\delta t}\cdot\cos(\omega t)}$ mit $\boxed{\textbf{Dämpfungsfaktor}\ \delta = -\frac{R}{2L}}$ und $\boxed{\textbf{Winkelgeschwindigkeit}\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$. Für die **Strom-Zeit-Funktion** und die Phasenverschiebung φ verwendet man den komplexe Ansatz $Q(t) = \hat{Q}\cdot e^{(\delta + i\omega)t}$ und leitet ab: $I(t) = \dot{Q}(t) = \hat{Q}\cdot(\delta + i\omega)\cdot e^{(\delta + i\omega)t}$ entsteht aus Q(t) durch Drehung um die **Phasenverschiebung** $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right)$ und Multiplikation mit dem Betrag $\sqrt{\delta^2 + \omega^2}$. Man kann also auch schreiben $I(t) = \hat{I}\cdot e^{\delta t}\cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$ mit der **Spitzenstromstärke** $\hat{I} = \hat{Q}\cdot\sqrt{\delta^2 + \omega^2}$. Der **Realteil** ist $I(t) = \hat{I}\cdot e^{\delta t}\cdot\cos(\omega t + \varphi)$. Die **Teilspannungen** $U_R = I\cdot R$, $U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_L = L\cdot\dot{I}$ erhält man durch Einsetzen bzw. erneutes Ableiten von I(t).

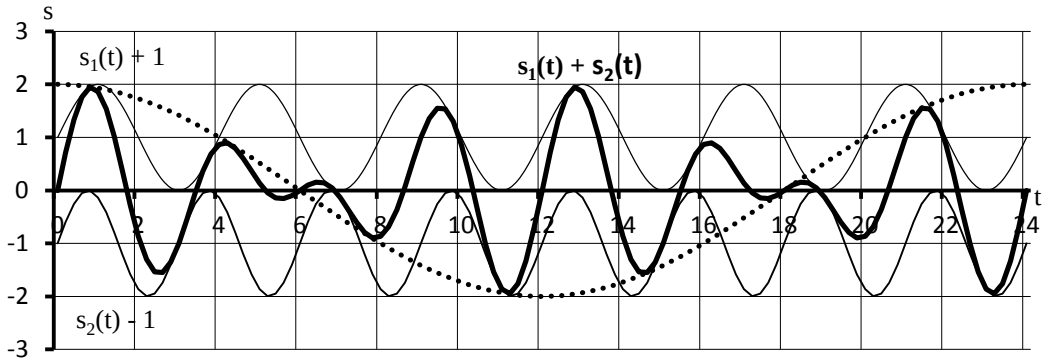


Schwingkreise in Uhren und Radiosendern wie z.B. in Mobiltelefonen müssen durch **Rückkopplung** in Schwing gehalten werden, um die Dämpfung auszugleichen. Dabei wird wie beim **Anstoßen einer Schaukel** mittels einer **induktiv gekoppelten Spule** L_2 die Stromrichtung und einen **Transistor** immer dann eine Zusatzspannung angeschaltet, wenn die Stromrichtung des Schwingkreises mit der Stromrichtung des Verstärkerkreises übereinstimmt.

Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 17

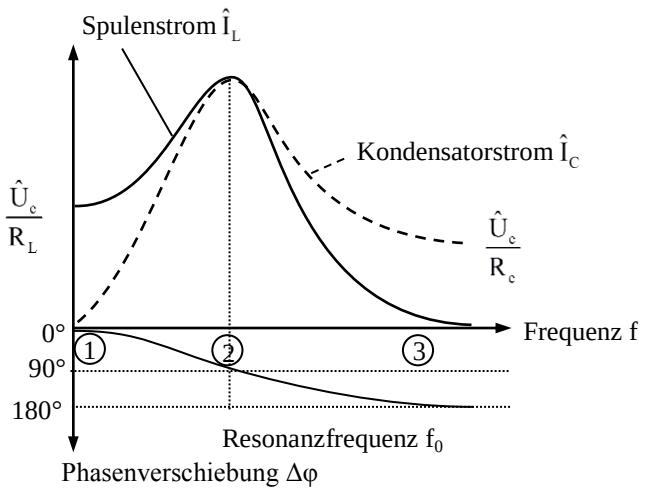
4.1.7. Schwebungen

Bei der **Überlagerung** zweier Schwingungen $s_1(t) = \hat{s}\cdot\sin(\omega_1 t)$ und $s_2(t) = \hat{s}\cdot\sin(\omega_2 t)$ mit **gleicher Amplitude** $\hat{s}$ addieren sich die Auslenkungen zu $s_1(t) + s_2(t) = \hat{s}\cdot[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] = 2\hat{s}\cdot\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}\cdot t\right)$, wobei man das **Additionstheorem** $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ verwendet. Das Ergebnis ist eine Schwingung, deren Frequenz $f = \frac{f_1+f_2}{2}$ dem **Mittelwert** der beiden Ausgangsschwingungen entspricht und deren **Amplitude** mit der Frequenz $\frac{|f_1-f_2|}{2}$ langsam an- und abschwillt, wodurch der Eindruck einer „**Schwebung**“ entsteht. Physikalisch lässt sich die Schwebung dadurch erklären, dass die beiden Schwingungen sich immer dann maximal verstärken, wenn sie **in Phase** bzw. im Takt schwingen. Die Gleichphasigkeit wird immer auf den gemeinsamen Vielfachen $T = \frac{T_1\cdot T_2}{|T_1-T_2|}$ der **Perioden** erreicht. Dabei wird abwechselnd in positive und negative Richtung verstärkt, so dass die eigentliche Schwebungsperiode 2T beträgt. Die entsprechende **Schwebungsfrequenz** ist also $f = \frac{1}{2T} = \frac{|T_1-T_2|}{2\cdot T_1\cdot T_2} = \frac{\left|\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}\right|}{2\cdot\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{f_2}} = \frac{|f_1-f_2|}{2}$.



4.1.8 Resonanz beim Schwingkreis

1. **Kriechphase**: Bei langsam einsetzenden Spannungswechseln des Erregers findet noch keine Induktion in der Spule statt und der Schwingkreis folgt passiv dem Erreger mit gleicher Phase $\varphi = \varphi_e$ bzw. $\Delta\varphi = 0$ und gleicher Spannungsamplitude $\hat{U} = \hat{U}_e$. Der sehr langsame Ladevorgang des Kondensators erfordert nahezu keinen Strom $\hat{I}_C = 0$, während der Strom durch die Spule $\hat{I}_L = \frac{\hat{U}_e}{R_L}$ nahezu ausschließlich durch ihren ohmschen Widerstand R_L bedingt wird.
2. **Resonanzphase**: Mit steigender Frequenz bewirkt die Induktion in der Spule nach der Lenzschen Regel eine Verzögerung der Spannungswechsel und damit eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi > 0$. Der verzögert entladene Kondensator erhöht die Anregungsspannung und die Amplitude nimmt zu, so dass $\hat{U} > \hat{U}_e$. Durch die erhöhte Zahl der Lade- und Entladevorgänge fließt ein zunehmender Strom auch durch den Kondensator. Bei Erreichen der **Eigenfrequenz** $f_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$ folgt der Schwingkreis im Phasenabstand einer **Viertelperiode** und im Gleichtakt der Anregung, so dass der Ladevorgang in jeder Periode **maximal verstärkt** wird. Der Schwingkreis nimmt in jeder Periode **Energie** auf, so dass es ohne Dämpfung zur **Resonanzkatastrophe** bzw. Zerstörung der Bauteile infolge überhöhter Stromstärken käme.
3. **Erzwungene Schwingung**: Bei weiterer Erhöhung der Anregungsfrequenz läuft der Schwingkreis der Anregung zunehmend hinterher, so dass die Phasenübereinstimmung bzw. die Energiezufuhr immer seltener eintreten. Die Phasenverzögerung steigt so lange an, bis Erreger und Schwingkreis schließlich im Gegentakt schwingen mit $\Delta\varphi = 180°$. Die Spule erzeugt infolge der schnellen Stromänderungen eine immer größere Induktionsspannung und lässt schließlich nahezu keinen Strom mehr passieren: $\hat{I}_L = 0$. Der Strom durch den Kondensator $\hat{I}_C = \frac{\hat{U}_e}{R_e}$ wird nahezu ausschließlich durch die sehr schnellen Lade- und Entladevorgänge des Kondensators sowie den Innenwiderstand R_e des Erregers bedingt:



Übungen: Aufgaben zur Resonanz Nr. 2