

4.1. Prüfungsaufgaben zu Wellen

Aufgabe 1: Wellengleichung (10)

- a) Unter Wasser ist der Schall 1500 m/s schnell. Ein Orca hört nach 0,14 s das Echo auf seinen Klick. Wie weit ist die Beute entfernt? (2)
- b) Welche Frequenz hat gelbes Licht mit $\lambda = 500$ nm und einer Lichtgeschwindigkeit von 300 000 m/s? (2)
- c) Wie schnell ist eine 1 m hohe Tsunamiwelle, deren 200 m langer Wellenberg sich auf hoher See bei 1000 m Wassertiefe in einer Sekunde unbemerkt unter einem Fischerboot hindurch bewegt? (3)
- d) An der Küste wird die Welle bei 50 m Wassertiefe verzögert und komprimiert, so dass der Berg nur noch 20 m lang ist und zwei Sekunden benötigt, um einen sorglos umherschwimmenden Tigerhai auf den Rücken zu drehen. Wie schnell und wie hoch ist die Welle jetzt? (3)

Lösung (10)

- a) Die Beute ist $s_{\text{hin}} = s_{\text{rück}} = 0,5 \cdot v \cdot t = 105$ m entfernt. (2)
- b) Die Frequenz ist $f = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{11}$ Hz (2)
- c) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $c = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (3)
- d) Jetzt ist die Welle nur noch $c = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ schnell. Wenn ihr Volumen $\approx$ Länge mal Höhe gleich bleiben soll, gilt $200 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 20 \text{ m} \cdot x \text{ m}$ und die Welle ist dann $x = 10$ m hoch. (3)

Aufgabe 1b: Wellengleichung (10)

- a) Unter Wasser ist der Schall 1500 m/s schnell. Ein Orca hört nach 0,7 s das Echo auf seinen Klick. Wie weit ist die Beute entfernt? (2)
- b) Welche Frequenz haben Dezimeterwellen mit $c = 300$ 000 m/s? (2)
- c) Wie schnell ist eine 1 m hohe Tsunamiwelle, deren 300m langer Wellenberg sich auf hoher See bei 1000 m Wassertiefe in einer Sekunde unbemerkt unter einem Fischerboot hindurch bewegt? (3)
- d) An der Küste wird die Welle bei 50 m Wassertiefe verzögert und komprimiert, so dass der Berg nur noch 20 m lang ist und immer noch eine Sekunde benötigt, um einen sorglos umherschwimmenden Tigerhai auf den Rücken zu drehen. Wie schnell und wie hoch ist die Welle jetzt? (3)

Lösung (10)

- a) Die Beute ist $s_{\text{hin}} = s_{\text{rück}} = 0,5 \cdot v \cdot t = 105$ m entfernt. (2)
- b) Die Frequenz ist $f = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{11}$ Hz (2)
- c) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $c = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (3)
- d) Jetzt ist die Welle nur noch $c = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ schnell. Wenn ihr Volumen $\approx$ Länge mal Höhe gleich bleiben soll, gilt $200 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 20 \text{ m} \cdot x \text{ m}$ und die Welle ist dann $x = 10$ m hoch. (3)

Aufgabe 2a: Wellengleichung (5)

Ein Stein fällt ins Wasser und erzeugt 5 cm hohe sowie 23 cm lange Wellen, die sich mit 70 cm pro Sekunde ausbreiten. 11 m vom Aufschlagpunkt entfernt sucht Erpel Anton nichtsahnend auf dem Teichboden nach leckeren Würmern. Formuliere die Wellengleichung und berechne, in welcher Höhe sich Anton nach 17 Sekunden befindet.

Lösung (5)

$$\text{Die Periodendauer ist } T = \frac{\lambda}{c} = \frac{0,23}{0,70} \approx 0,33 \text{ s.} \quad (1)$$

$$\text{Aus } y(x;t) = y_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ folgt } y(10;17) = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{17}{0,33} - \frac{10}{0,2}\right)\right) \approx 0,83 \text{ cm.} \quad (4)$$

Aufgabe 2b: Wellengleichung (5)

Ein Stein fällt ins Wasser und erzeugt 7 cm hohe sowie 25 cm lange Wellen, die sich mit 90 cm pro Sekunde ausbreiten. 11 m vom Aufschlagpunkt entfernt sucht Erpel Anton nichtsahnend auf dem Teichboden nach leckeren Würmern. Formuliere die Wellengleichung und berechne, in welcher Höhe sich Anton nach 13 Sekunden befindet.

Lösung (5)

$$\text{Die Periodendauer ist } T = \frac{\lambda}{c} = \frac{0,25}{0,90} \approx 0,28 \text{ s.} \quad (1)$$

$$\text{Aus } y(x;t) = y_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ folgt } y(11;13) = 7 \text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{13}{0,28} - \frac{11}{0,25}\right)\right) \approx 1,84 \text{ cm.} \quad (4)$$

Aufgabe 3: Wellengleichung (8)

Frühling auf dem Teich: Wels Anton zeigt den Frauen, was geht, und landet nach einem kräftigen Sprung mit einem mächtigen Platscher wieder im Wasser. Die 5 cm hohen Wellen breiten sich mit 1,2 m/s aus und sind 60 cm lang. 96 m weiter sind Haubentaucher Florian und seine neue Bekannte Estrella in der ersten zarten Phase ihrer Balz und stehen sich in 6 m Abstand zueinander nahe bei der romantischen Insel mit der Linde unbeweglich gegenüber. Anton, Florian und Estrella befinden sich auf einer geraden Linie.

- Berechne die Periodendauer der Welle. (1)
- Welche Strecke hat die Wellenfront nach 10 Sekunden zurückgelegt? (1)
- Auf welcher Höhe befinden sich Florian und Estrella nach 85,125 Sekunden? (3)
- Warum bemerken die beiden in ihrer gemeinsamen Welt weder den Sprung noch die Wellen? Begründe mit dem Phasenunterschied. (2)
- Da sich die Wellenenergie auf den gesamten Umfang der Kreiswelle verteilt, wird die Welle nach außen hin immer flacher. In 48 m Entfernung sind sie noch 2,5 cm hoch. Wie hoch sind sie in 96 m Entfernung, wenn sie sich umgekehrt proportional zum Umfang verhalten? (1)

Lösung (8)

- $T = \frac{\lambda}{c} = \frac{0,6 \text{ m}}{1,2 \text{ m/s}} = 0,5 \text{ s}$ (1)
- $\Delta x = c \cdot t = 12 \text{ m}$ (1)
- Florian: $y(t) = y_0 \cdot \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin 2\pi 170,25 - 160 = 5 \text{ cm}$ (2)
Estrella: $y(t) = y_0 \cdot \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin 2\pi 170,25 - 170 = 5 \text{ cm}$ (1)
- 6 m Abstand entspricht genau 10 Wellenlängen, so dass sie im synchron bzw. gleichphasig auf und nieder schweben. (2)
- In doppelter Entfernung von 2.48 m = 96 m sind sie nur noch halb so hoch, also 1,25 cm. (2)

Aufgabe 4: Wellengleichung (5)

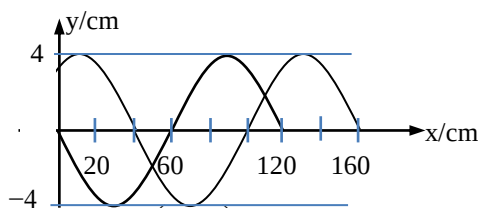
Im Ursprung des Koordinatensystems schwingt ein Erreger mit $y(0;t) = 4 \text{ cm} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \cdot t \right)$ mit t in Sekunden. Er erzeugt eine

Transversalwelle, die sich mit $c = 40 \text{ cm/s}$ ausbreitet.

- Wie groß sind die Periodendauer und die Wellenlänge der Welle? (1)
- Zeichne die Welle für die Zeitpunkte $t_1 = 3 \text{ s}$ und $t_2 = 4 \text{ s}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. (2)
- Formuliere die Ort-Zeit-Funktionen für die Schwingungen an den Stellen $x_1 = 30 \text{ cm}$ und $x_2 = 60 \text{ cm}$. (2)

Lösung (5)

- $\omega = \pi \cdot \text{Hz} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 3 \text{ s}$ und $\lambda = c \cdot T = 120 \text{ cm}$. (1)
- Skizze: (2)



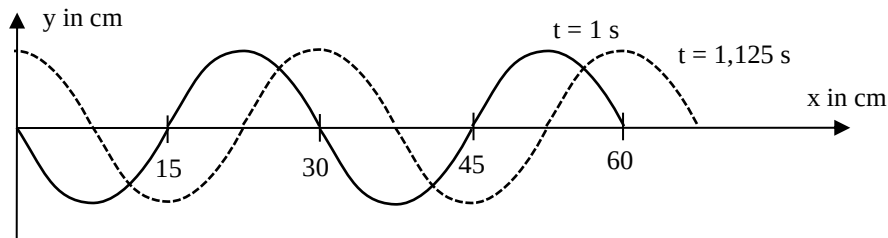
- $y(30 \text{ cm}; t) = -4 \text{ cm} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} \cdot t \right)$ und $y(60 \text{ cm}; t) = -4 \text{ cm} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \cdot t \right)$ (2)

Aufgabe 5: Wellengleichung

- Erläutere die Entstehung einer Welle
- Erkläre die Begriffe Transversalwelle und Longitudinalwelle
- Ein Stein wurde ins Wasser geworfen, so dass sich 30 cm lange und 5 cm hohe Wellen mit einer Geschwindigkeit von 60 cm pro Sekunde ausbreiten. Beschreibe die Bewegung der Wasseroberfläche in der Umgebung der Einschlagstelle durch eine Gleichung.
- Skizziere die Wasseroberfläche nach einer Sekunde und nach 1,25 Sekunden.

Lösung

- Eine Schwingung mit der Amplitude y_0 , Periodendauer T bzw. Frequenz $f = \frac{1}{T}$ und Winkelfrequenz $\omega = 2\pi f$ breitet sich mit der Wellenlänge λ und der Wellengeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T}$ im Raum aus, so dass die Schwingung am Ort x mit der Phasenverzögerung $t_0 = \frac{\lambda}{c}$ beginnt. Die Auslenkung am Ort x zur Zeit t ist dann $y(x; t) = y_0 \cdot \sin(\omega(t - t_0)) = y_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$
- Bei der Transversalwelle ist die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und bei der Longitudinalwelle parallel zur Ausbreitungsrichtung. Beispiele sind Wasserwellen an der Oberfläche und unter Wasser.
- Die Periodendauer ist $T = \frac{\lambda}{c} = 0,5$ Sekunden. Die Auslenkung am Ort x zur Zeit t ist demnach $y(x; t) = 5 \cdot \sin\left(2\pi\left(2t - \frac{x}{30}\right)\right)$ mit y bzw. x in Zentimetern und t in Sekunden.
- Skizze:



Aufgabe 6: Dreidimensionale Wellengleichung (14)

Die Bugwelle eines Frachtschiffes auf dem 50 m breiten Mittellandkanal lässt sich angenähert mit der Gleichung $z(x,y;t) = 0,5 \cdot \cos[\pi(t - x - y)]$ beschreiben, wobei die z -Achse nach oben, die y -Achse in Fahrtrichtung und die x -Achse senkrecht zur Fahrtrichtung nach rechts weisen.

Ente Daisy hat sich vom Ufer aus 10 m auf die Wasseroberfläche zurückgezogen und beobachtet misstrauisch Boxer Killer, der nichtsahnend auf der nur 30 cm hohen Kanalwand vor sich hin döst. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich Schiffsbug, Daisy und Killer gemeinsam auf der x -Achse.

- Skizziere Frachtschiff, Daisy und Killer im Augenblick $t = 0$. (4)
- Bestimme Periodendauer, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle für $y = 0$, d.h. in x -Richtung senkrecht zur Fahrtrichtung. (3)
- Bestimme Periodendauer, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle für $x = 0$, d.h. in y -Richtung parallel zur Fahrtrichtung. (1)
- Bestimme Periodendauer, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle in Ausbreitungsrichtung der Welle. (1)
- Skizziere ein vollständig beschriftetes z - t -Diagramm für Daisys Position ($x = 15$ und $y = 0$) in dem Zeitraum, in dem die erste Bugwelle unter ihr durchläuft. (4)
- Wird Killer nass und wenn ja, zu welchem Zeitpunkt? (2)

Lösung (14)

a) Beschriftete Skizze: siehe rechts

b) Amplitude $y_0 = 0,5 \text{ m}$;Winkelgeschwindigkeit $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$ Wellenlänge $\lambda = 2 \text{ m}$ Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) Ebenso wie b)

d) $c = \sqrt{2} \text{ m/s}$, $\lambda = \sqrt{2} \text{ m}$ und T bleibt gleich

e) Beschriftete Skizze: siehe rechts

Beachte, dass die Welle ca. 0,5 Sekunden vorher ankommt, wobei das Zusammenschieben des Wasser in der ersten halben Sekunde vor Beginn der eigentlichen „Sinus“-Welle gar nicht durch die Gleichung beschrieben wird!

f) Da die Welle höher ist als die Kanalwand, wird er nach 25 Sekunden nass.

(4)

(1)

(1)

(1)

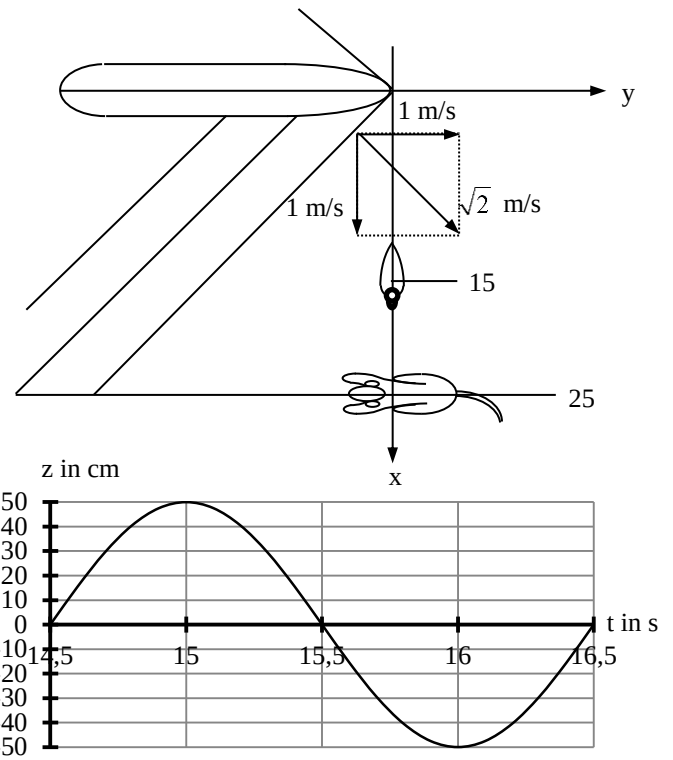
(1)

(1)

(4)

(1)

(1)

**Aufgabe 15a: Doppler-Effekt**Begründe, warum die Frequenz der Sirene eines sich mit der Geschwindigkeit v nähernden Krankenwagens für den ruhendenBeobachter um den Faktor $\frac{1}{1 - \frac{v}{c}}$ erhöht scheint.**Lösung:**In einer Periode T hat der Krankenwagen die Strecke $v \cdot T$ zurückgelegt und die Wellenlänge verkürzt sich auf $\lambda' = \lambda - v \cdot T$. DieGeschwindigkeit c der Welle bleibt gleich, so dass die Frequenz $f = \frac{c}{\lambda}$ sich erhöht auf $f' = \frac{c}{\lambda - v \cdot T} = \frac{c/\lambda}{1 - \frac{v \cdot T}{\lambda}} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$.**Aufgabe 15b: Doppler-Effekt**Begründe, warum sich die Frequenz einer ruhenden Alarmsirene für einen sich mit der Geschwindigkeit v näherndenAutofahrer um den Faktor $1 + \frac{v}{c}$ erhöht scheint.**Lösung**Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle erhöht sich für den entgegenkommenden Fahrer auf $c + v$ und die Wellenlängebleibt gleich, so dass die Frequenz $f = \frac{c}{\lambda}$ sich erhöht auf $f' = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\lambda/c} = f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)$.**Aufgabe 16: Dopplereffekt (6)**

Fred ist auf der A 81 und hat ein bisschen Spaß mit seinem Lamborghini. Polizeiobermeister Müller steht am Rand und testet das neueste Huawei-Modell SPY 3000 einer 3 GHz – Radarpistole, deren Signal mit 3,000 000 6 GHz zurückkommt.

a) Bestimme die Wellenlänge des Geräts. (2)

b) Berechne Freds Geschwindigkeit. (5)

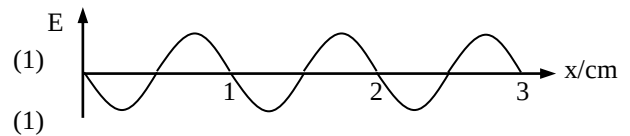
Lösung (6)a) $\lambda = \frac{c}{f} = 10 \text{ cm}$ (2)b) $f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \Leftrightarrow v = c \cdot \left(1 - \frac{f}{f'}\right) \approx 60 \text{ m/s} = 216 \text{ km/h}$ (2)

Aufgabe 17: Dopplereffekt (12)

- a) Eine elektromagnetische Welle wird von einem ruhenden Sender mit der Frequenz ausgestrahlt und von einem sich mit der Geschwindigkeit v relativ zum Sender bewegenden Objekt reflektiert. Zeige, dass die reflektierte Welle mit der Frequenz $f' = f \cdot \frac{c-v}{c+v}$ wieder beim Sender ankommt. (3)
- b) Zeige, dass die Geschwindigkeit des Objektes $v = \frac{c \cdot \Delta f}{2f - \Delta f}$ beträgt, wenn die Welle aus a) mit der Frequenzverschiebung $\Delta f = f - f'$ wieder beim Sender ankommt. (2)
- c) Eine Radarpistole sendet Zentimeterwellen ($\lambda = 1$ cm) aus. Bestimme die Periodendauer und zeichne den ausgehenden Wellenzug nach 0,1 ns in beschriftetes Koordinatensystem. Erkläre anhand der Zeichnung den Begriff der Transversalwelle. (3)
- d) Der von der Radarpistole aus c) ausgesandte Wellenzug kommt nach einer Laufzeit von zwei Mikrosekunden ($\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ s) mit einer um $\Delta f = 8$ kHz erhöhten Frequenz zurück. In welcher Entfernung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das reflektierende Objekt? (2)
- e) Nenne und begründe zwei Konstruktionsmerkmale eines Tarnkappenautos mit „stealth“-Technologie, welches von Radarfallen nicht erfasst wird. Berücksichtige sowohl die Form als auch das verwendete Material. (2)

Lösung (12):

- a) Die Periodendauer erhöht sich auf $T' = \frac{T}{1 - \frac{v}{c}}$ bei der Reflektion (bewegter Empfänger) (1)
- und weiter auf $T'' = T' \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) = T \cdot \frac{c+v}{c-v}$ beim Empfang (bewegter Sender). (1)
- Die Frequenz ist also $f' = \frac{1}{T''} = \frac{1}{T} \cdot \frac{c-v}{c+v} = f \cdot \frac{c-v}{c+v}$ (1)
- b) Die Frequenzverschiebung ist $\Delta f = f - f' = f \cdot \left(1 - \frac{c-v}{c+v}\right) = f \cdot \frac{2v}{c+v}$ (2)
- c) Periodendauer $T = \frac{\lambda}{c} = 3,3 \cdot 10^{-11}$ s. (1)
- 10 Nanosekunden sind drei Periodendauern
 $\Rightarrow$ Zeichnung mit 3 Perioden (1)
- Bei einer Transversalwelle steht der Amplitudenvektor (hier das E- bzw. B-Feld) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (1)
- d) Die Entfernung ist $\Delta x = c \cdot \frac{\Delta t}{2} = 300$ m (Hin- und Rückweg der Welle) (1)
- Die Geschwindigkeit des Objektes ist $v = \frac{c \cdot \Delta f}{2f - \Delta f} \approx c \cdot \frac{\Delta f}{2f} = 40$ m/s = 144 km/h vom Beobachter weg (1)
- e) Form: möglichst pyramidenförmig, so dass Radarwellen an den geneigten Seitenflächen nach oben reflektiert werden. (1)
- Material: Kunststoffe mit hoher Dielektrizitätszahl ϵ , die das elektrische Feld absorbieren. (1)



Aufgabe 18a: Interferenz (5)

Bestimme die Phase und die Amplitude der Welle, die durch Interferenz von $y_1(x;t) = 2 \cdot \sin\left(2\pi\left(t-x\right) + \frac{\pi}{3}\right)$ und

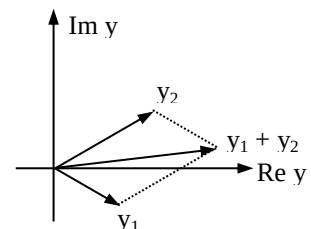
$y_2(x;t) = 3 \cdot \cos\left(2\pi\left(t-x\right) + \frac{\pi}{6}\right)$ entsteht und zeichne ein Zeigerdiagramm.

Lösung (5)

Mit $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ erhält man $y_1 + y_2 = \text{Re}(2 \cdot e^{-i\pi/6} + 3 \cdot e^{i\pi/6}) = \text{Re}(4,36 \cdot e^{i6,58^\circ})$

$\Rightarrow$ Amplitude $A \approx 4,36$ und Phasenverschiebung $\alpha \approx 6,58^\circ$ (2)

Zeigerdiagramm: (3)



Aufgabe 18b: Interferenz (5)

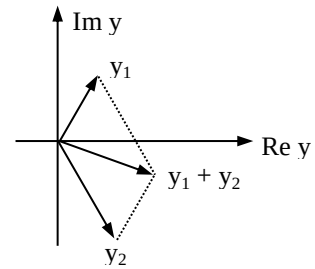
Bestimme die Phase und die Amplitude der Welle, die durch Interferenz von $y_1(x;t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi(t-x) + \frac{\pi}{3}\right)$ und $y_2(x;t) = 3 \cdot \sin\left(2\pi(t-x) + \frac{\pi}{6}\right)$ entsteht und zeichne ein Zeigerdiagramm.

Lösung

Mit $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ erhält man $y_1 + y_2 = \operatorname{Re}(2 \cdot e^{i\pi/3} + 3 \cdot e^{-i\pi/3}) \approx \operatorname{Re}(2,65 \cdot e^{i70,9^\circ})$

$\Rightarrow$ Amplitude $A \approx 2,65$ und Phasenverschiebung $\alpha \approx -19,1^\circ$ (2)

Zeigerdiagramm: (3)



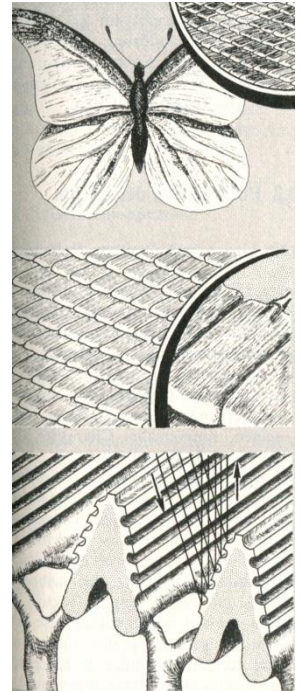
Aufgabe 19: Interferenz (8)

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Oberflächenstruktur eines Schmetterlingsflügels. Welchen Abstand müssen die Stufen haben, wenn rotes Licht mit $\lambda = 600 \text{ nm}$

- mit maximaler Intensität reflektiert (2)
- mit minimaler Intensität reflektiert bzw. werden soll? (2)

Begründe mit Hilfe einer Skizze. (2)

- „Simple club“ verwendet die Begriffe „konstruktive“ und „destruktive“ Interferenz. Formuliere eine sinnvolle Definition dieser Begriffe und ordne sie begründet den Aufgabenteilen a) bzw. b) zu. (2)



Lösungen (8)

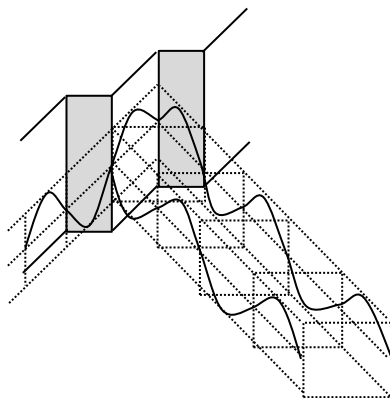
- Da bei der Reflexion ein Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ auftritt, müssen die Stufen für Hin- und Rückweg einen Gangunterschied von insgesamt $\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ aufweisen, um wieder auf einen Gangunterschied von ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge zu kommen. Die Stufen müssen also eine Höhe von $\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 300 \text{ nm}$ besitzen. (2)

- Die Stufen müssen für Hin- und Rückweg einen Gangunterschied von insgesamt $n \cdot \lambda$ aufweisen, um den Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ zu erhalten.

Die Stufen müssen also eine Höhe von $\frac{1}{2} n \cdot \lambda = n \cdot 300 \text{ nm}$ besitzen. (2)

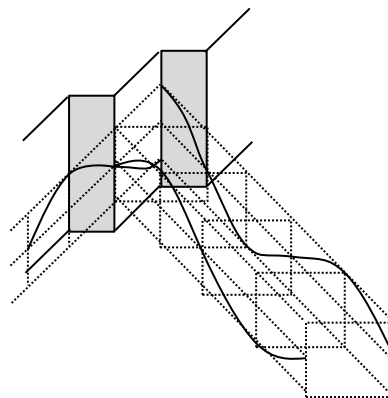
Skizze: siehe unten (2)

- Konstruktiv ist verstärkend bzw. gleichphasig und destruktiv ist auslöschend bzw. gegenphasig. (2)



Konstruktive Interferenz an Stufen

mit Höhe $\frac{1}{2} \cdot \lambda$



Destruktive Interferenz an Stufen

mit Höhe $\frac{1}{4} \cdot \lambda$

Aufgabe 20: Zweidimensionale Interferenz (6)

Zwei Steine fallen an den Orten A(5 m|0) und B(0|2 m) gleichzeitig ins spiegelglatte Wasser und erzeugen zwei Kreiswellen, die sich mit der Geschwindigkeit $c = 1 \text{ m/s}$, der Wellenlänge $\lambda = 10 \text{ cm}$ und der Amplitude $y_A = y_B = 3 \text{ cm}$ von diesen beiden Punkten aus gleichphasig sinusförmig ausbreiten. Am Ort C(8 m|8 m) sitzt ein kleiner Frosch auf seinem Blatt.

- Wann kommt der erste Wellenberg von 3 cm Höhe bei dem Frosch an? (2)
- Wie hoch können die Wellenberge bei der Überlagerung der beiden Wellen in C maximal werden und wann kommt der erste dieser Interferenzberge dort an? (4)

Lösungen (6)

Die Periodendauer ist $T = \lambda/c = 0,1 \text{ s}$, d.h., jede Sekunde verlassen 10 Wellenberge den Erreger.

- $\overline{AC} = \sqrt{73} \text{ m} \approx 8,544 \text{ m} = 85,44 \lambda \Rightarrow$ nach 8,544 s beginnt sich das Blatt zu heben. (2)
- Wegen $\overline{BC} = \sqrt{100} \text{ m} = 10 \text{ m} = 100 \lambda$ erreichen die Wellen von B erst nach 10 s das Blatt und überlagern sich dort mit den Wellen von A. (1)
Die Phasenverschiebung von $85,44 \lambda - 100 \lambda = -14,56 \lambda$ bzw. $-0,56 \lambda$ bzw. $0,44 \lambda$ bzw. $158,4^\circ$ führt nahezu zur gegenseitigen Auslöschung: $3 \text{ cm} \cdot e^{i \cdot 0} + 3 \text{ cm} \cdot e^{i \cdot 0,44 \cdot 2\pi} = \underline{1,12 \text{ cm} \cdot e^{i \cdot 79,2^\circ}}$. (1)
Die Interferenzberge sind nur noch 1,12 cm hoch und kommen mit Phasenverschiebung von 79,2° bzw. $0,22 \lambda$ bzw. $0,22 T = \underline{0,022 \text{ s}}$ beim Frosch an. (1)
Der erste dieser abgeschwächten Berge kommt frühestens mit der Wellenfront von B nach 8,544 s beim Frosch an. (1)
Der nächste Termin im 0,1-Sekundentakt + Phasenverschiebung 0,022 s ist dann nach 8,622 s. (1)

Aufgabe 21: Zweidimensionale Interferenz (8)

Erpel Kurt sitzt am Ufer eines Sees auf der Position K(60|0) und beobachtet besorgt die 30 cm hohen, 4 m langen und 3 m/s schnellen Bugwellen der beiden Ausflugsdampfer A und B.

- Wie schnell sind die beiden Ausflugsdampfer? (2)
- Wie weit ist Kurt von den beiden Wellenfronten entfernt? (3)
- Wann erreichen die beiden Wellenfronten Kurt? (1)
- Zeige und begründe, dass Kurt sich keinerlei Sorgen um nasse Flossen oder Federn machen muss. (2)

Lösungen: (8)

- Durch den Vergleich der beiden jeweils hell und dunkel schraffierten Dreiecke erhält man die Geschwindigkeiten

$$v_A = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2}}{2} \cdot c = \frac{3}{2} \sqrt{13} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ und } v_B = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot c = 3 \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2)$$

- Die Elementarwelle a: $y = -\frac{3}{2}x + 90$ schneidet die Wellenfront A: $y =$

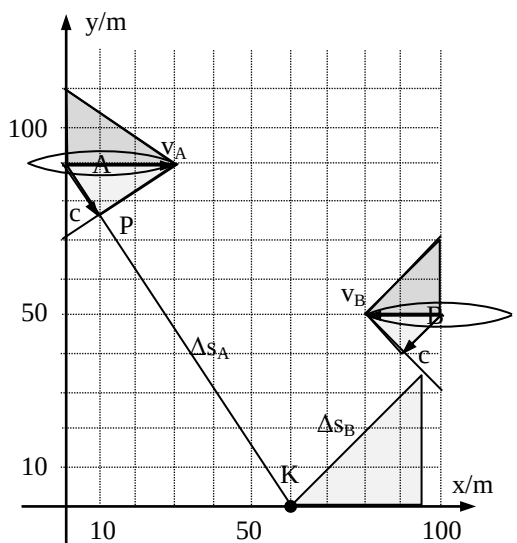
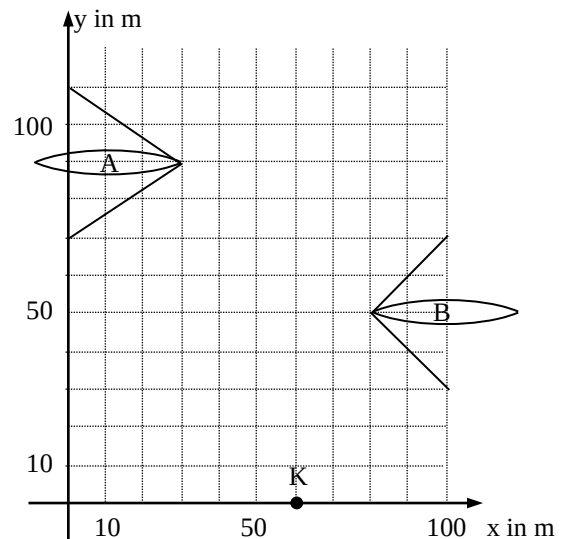
$$\frac{2}{3}x + 70 \text{ im Punkt } P\left(\frac{120}{13} \mid \frac{990}{13}\right) \text{ mit der Entfernung } \Delta s_A = \overline{PK} = \sqrt{\left(60 - \frac{120}{13}\right)^2 + \left(\frac{990}{13} - 0\right)^2} \approx 91,53 \text{ m} \quad (2)$$

Die Entfernung zur Wellenfront B lässt sich aus dem hell gefärbten Dreieck zu $\Delta s_B = 35\sqrt{2} \text{ m} \approx 49,50 \text{ m}$ bestimmen. (1)

- Wellenfront A erreicht ihn nach $\frac{\Delta s_A}{c} = 31,51 \text{ s}$ und Wellenfront B

$$\text{nach } \frac{\Delta s_B}{c} = 16,50 \text{ s.} \quad (1)$$

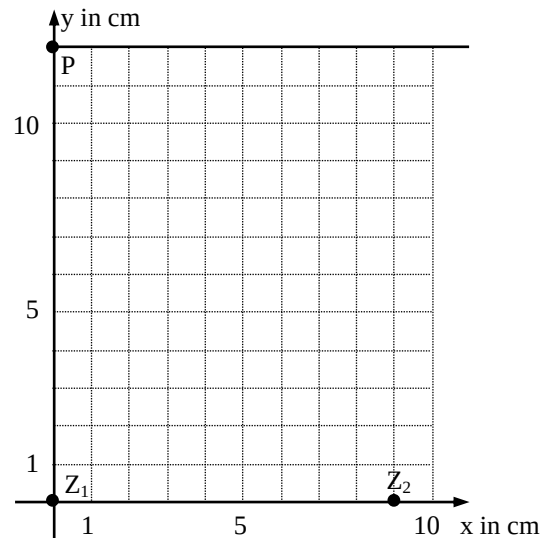
- Der Gangunterschied der beiden Bugwellen ist $\frac{\Delta s_A - \Delta s_B}{\lambda} \approx 10,51 \lambda$ bzw. $0,51 \lambda$ bzw. dem Phasenunterschied $0,51 \cdot 2\pi \approx 182,5^\circ$. Die beiden Wellen löschen sich also bei Kurt nahezu vollständig aus. (2)



Aufgabe 22: Zweidimensionale Interferenz (9)

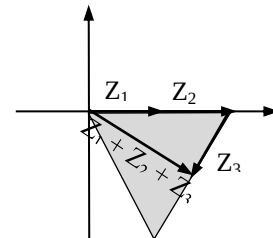
Auf einer Wasseroberfläche befinden sich wie rechts abgebildet zwei Wellenerreger Z_1 und Z_2 , welche gleichphasig schwingen und dabei Wellen mit der Wellenlänge 3 cm und der Amplitude 2 mm erzeugen. Die Abnahme der Amplitude mit wachsender Entfernung vom Erreger soll zunächst nicht berücksichtigt werden. Auch die etwaige Reflexion der Wellen am Beckenrand soll nicht beachtet werden.

- Zeige, dass in P ein Interferenzmaximum existiert. (2)
- Bestimme die Anzahl der Interferenzmaxima, die sich rechts von P auf der Parallelen zur x-Achse ausbilden. (3)
- Ein dritter Erreger Z_3 wird im Punkt (10 cm | 12 cm) angebracht und schwingt gleichphasig und mit gleicher Amplitude wie Z_1 und Z_2 . Bestimme nun die Amplitude im Punkt P. (2)
- Begründe energetisch, warum die Amplitude einer konzentrischen Einzelwelle bei doppeltem Abstand vom Erreger nur noch halb so gross ist. (2)



Lösungen (9)

- Mit Pythagoras erhält man für die Differenz der Weglängen
 $|Z_2P| - |Z_1P| = \sqrt{12^2 - 9^2} \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 15 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 3 \text{ cm} = \lambda$ (1)
 und damit die Bedingung für maximale Verstärkung. (1)
- Das erste Maximum P_1 ist bei $x_1 = 4,5 \text{ cm}$ genau zwischen den beiden Erregern, so dass die Weglängen $|Z_1P_1| = |Z_2P_1|$ gleich sind. (1)
 Das zweite Maximum P_2 ist bei $x_2 = 9 \text{ cm}$ genau über Z_2 , so dass symmetrisch zum Fall a) $|Z_1P_2| - |Z_2P_2| = 3 \text{ cm} = \lambda$ gilt. (1)
 Für das dritte Maximum P_3 gilt $|Z_1P_3| - |Z_2P_3| = 6 \text{ cm} = 2 \cdot \lambda$. Für das vierte Maximum müssten sich die Weglängen um $3 \cdot \lambda = 9 \text{ cm}$ unterscheiden, was aber unmöglich ist, weil für jeden Punkt P_4 außerhalb der x-Achse $|Z_1P_4| - |Z_2P_4| < |Z_1Z_2| = 9 \text{ cm}$ gilt. (möglich ist auch eine andere Formulierung oder graphische Veranschaulichung der Dreiecksungleichung) (1)
- Der Gangunterschied zu Z_1 und Z_2 beträgt 2 cm bzw. 5 cm, so dass die Welle von Z_3 in P um $\frac{2}{3} T \triangleq 240^\circ$ vor bzw. um $\frac{1}{3} T \triangleq 120^\circ$ nachläuft. (1)



Aus dem Zeigerdiagramm erhält man mit Pythagoras oder der Höhenformel für das gleichseitige Dreieck mit $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = 2 \text{ mm}$ eine Amplitude

$$\text{von } |Z_1 + Z_2 + Z_3| = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 4 \text{ mm} \approx 3,46 \text{ mm.} \quad (2)$$

Aufgabe 23: Zweidimensionale Interferenz (15)

Aditia und ihre Schwester Milli werfen Steine ins Wasser. Aditias Stein erzeugt am Ort (4|5) eine Kreiswelle, die sich mit einer Amplitude von 20 cm ausbreitet. Millis Stein trifft 0,2 Sekunden später im Ort (2|7) auf und erzeugt eine Amplitude von 15 cm. Beide Wellen breiten sich mit 1 m/s und einer Wellenlänge von 1 m aus. Im Ort (1|1) sitzt Wasserläufer Kurt und erwartet mit Sorge die ankommenden Wellen. Alle Orte sind in Metern angegeben.

- Skizziere die Situation in ein Koordinatensystem. (3)
- Formuliere die beiden **Wellengleichungen** für die Abstände s_A und s_M von den Auftreffpunkten A und M. (4)
- Formuliere die beiden Gleichungen für die **Schwingungen**, die am Ort (1|1) durch die beiden Wellen erzeugt werden. (2)
- Wann kommt der erste Wellenberg bei Kurt an und wie hoch ist er? (2)
- Wann kommt der zweite Wellenberg bei Kurt an und wie hoch ist er? (4)

Lösung:

- Skizze (3)
- Die Wellengleichungen sind $y_A(s_A; t) = 0,2 \cdot \sin[2\pi(t - s_A)]$ und $y_M(s_M; t) = 0,15 \cdot \sin[2\pi((t - 0,2) - s_M)]$. (2)
- In (1|1) ist $s_A = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$ und $s_M = \sqrt{(2-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{37} \approx 6,08$.
 Die Schwingungsgleichungen in (1|1) sind also $y_A(5; t) = 0,2 \cdot \sin[2\pi(t - 5)]$ und $y_M(6,08; t) = 0,15 \cdot \sin[2\pi(t - 6,28)]$. (4)
- Kurt beginnt durch Ankunft von Aditias Welle nach 5 Sekunden zu schwanken und erreicht den ersten Wellenberg von 20 cm Höhe nach $5 \frac{1}{4}$ Perioden bzw. 5,25 Sekunden. (2)
- Die Überlagerung gibt sich aus dem Zeigerdiagramm bzw. durch komplexe Addition z.B. für $t = 6 \text{ s}$ zu $y_A(5; 6) + y_M(6,08; 6) = 0,2 \cdot \text{cis}(2\pi) + 0,15 \cdot \text{cis}(-2\pi \cdot 0,28) \approx 0,226 \cdot \text{cis}(-2\pi \cdot 0,112) \approx 0,226 \cdot \text{cis}(-40,6^\circ)$. (2)
- Durch Überlagerung mit Millis Welle kommt der nächste Wellenberg erst leicht verzögert nach $6,25 + 0,112 = 6,36$ Sekunden aber dafür mit verstärkter Höhe von 22,6 cm. (2)

Aufgabe 24: Reflexionsgesetz (8)

Erkläre und begründe das Reflexionsgesetz mit Hilfe des Huygensschen Prinzips und des Kongruenzsatzes ssw anhand einer Skizze

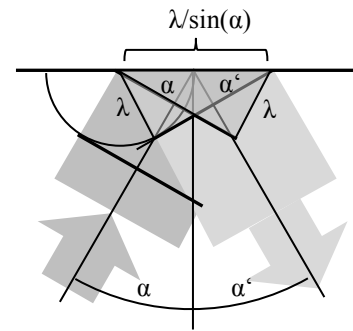
Lösung:

Beschriftete Skizze mit zwei Wellenfronten und zwei rechtwinkligen Dreiecken. (4)

Die von links im Einfallswinkel α zur Senkrechten einlaufende Welle erzeugt mit ihren ersten zwei Wellenfronten im Abstand von $\lambda/\sin(\alpha)$ auf der Reflexionsfläche zwei halbkreisförmige neue Wellenfronten im Ausfallswinkel α' zur Senkrechten.

Da die beiden rechtwinkligen Dreiecke in einem Winkel (dem rechten) und den beiden Seitenlängen λ bzw. $\lambda/\sin(\alpha)$ übereinstimmen, sind sie kongruent und die beiden Winkel α und α' stimmen ebenfalls überein:

Einfallswinkel α = Ausfallswinkel α' . (4)



Aufgabe 25: Brechungsgesetz (5)

Erkläre und begründe das Brechungsgesetz mit Hilfe der Skizze rechts:

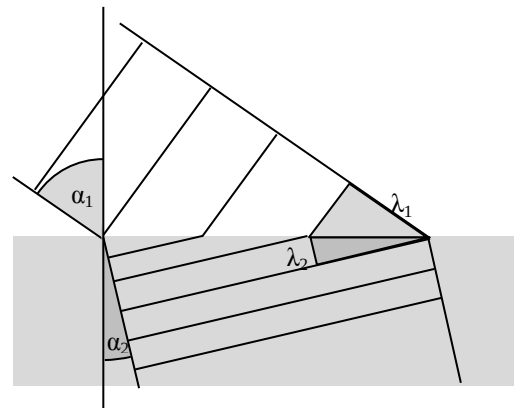
Lösung:

Parallele Linien als Wellenfronten interpretieren. (1)

Verringerung der Wellenlänge durch Abnahme der Wellengeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$ bei gleichbleibender Frequenz f im optisch dichteren Medium (2)

Durch Betrachtung der beiden gefärbten Dreiecke erhält man

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$



Aufgabe 26: Beugung am Doppelspalt (3)

Berechne die Wellenlänge eines Lasers, der durch einen Doppelspalt mit Spaltabstand $d = 0,1 \text{ mm}$ auf einem 2 m entfernten Schirm einen Abstand von 1 cm zwischen den Maxima 0. und 1. Ordnung erzeugt.

Lösung (3)

$$\lambda = \frac{a_1 \cdot d}{e} = 500 \text{ nm} \quad (3)$$

Aufgabe 27: Elektronenbeugung (6)

- Berechne die de-Broglie-Wellenlänge von Elektronen, die mit 100 V beschleunigt wurden.
- Welchen Abstand haben die Beugungsmaxima dieses Elektronenstrahls durch einen Doppelspalt mit $d = 100 \text{ nm}$ auf einem 20 cm entfernten Schirm?

Aufgabe 6 (7)

$$\text{a) } \lambda = \frac{h \cdot c}{100 \text{ eV}} \approx 1,24 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1,2 \text{ nm} \quad (3)$$

$$\text{b) } a_1 = \frac{\lambda \cdot e}{d} \approx 2,48 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2,48 \text{ mm} \quad (3)$$

Aufgabe 28: Beugung

- Legt man Flurins Haar in den Strahlengang eines Lasers mit einer Wellenlänge von 600 nm , so sieht man in 1 m Entfernung eine Punktreihe mit dem Abstand 1 cm . Wie dick ist Flurins Haar?
- Rotes Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 700 \text{ nm}$ tritt durch einen 1 mm dicken Spalt auf einen 1 m entfernten Schirm. Wie weit ist das Beugungsmaximum 1. Ordnung vom Hauptmaximum entfernt?
- Wie ändert sich das Beugungsbild, wenn der 1 mm dicke Spalt durch zwei $10 \mu\text{m}$ dicke und ebenfalls 1 mm voneinander entfernte Spalte ersetzt wird? Begründe anhand einer Skizze.

Lösungen:

a) $d = \lambda \cdot \frac{B}{b} = 60 \text{ } \mu\text{m}$

b) $\frac{\lambda}{d/2} = \frac{B}{b} \Rightarrow B = \frac{2 \cdot b \cdot \lambda}{d} = 1,4 \text{ mm}$

c) Der Abstand halbiert sich auf $B = \frac{b \cdot \lambda}{d} = 0,7 \text{ mm}$ und die Streifen werden viel dunkler.

Aufgabe 29: Beugung

Wie groß muss das Objektiv eines Fernrohrs sein, damit es die Beugungsscheibchen zweier Sterne im Winkelabstand von einer

Bogensekunde = $\frac{1}{3600}$ Grad bei einer Wellenlänge von 400 nm noch trennen kann? Begründe anhand einer Skizze.

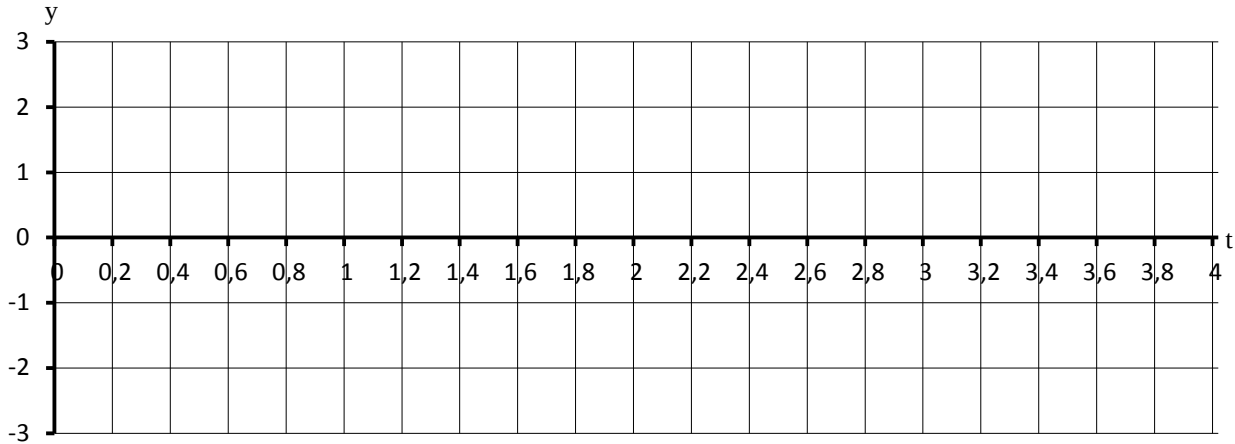
Lösung:

$$\frac{\lambda}{d/2} = \frac{B}{b} = \frac{2\pi}{360 \cdot 3600} \Rightarrow \text{Durchmesser } d = \frac{1296000 \cdot \lambda}{\pi} = 16,5 \text{ cm}$$

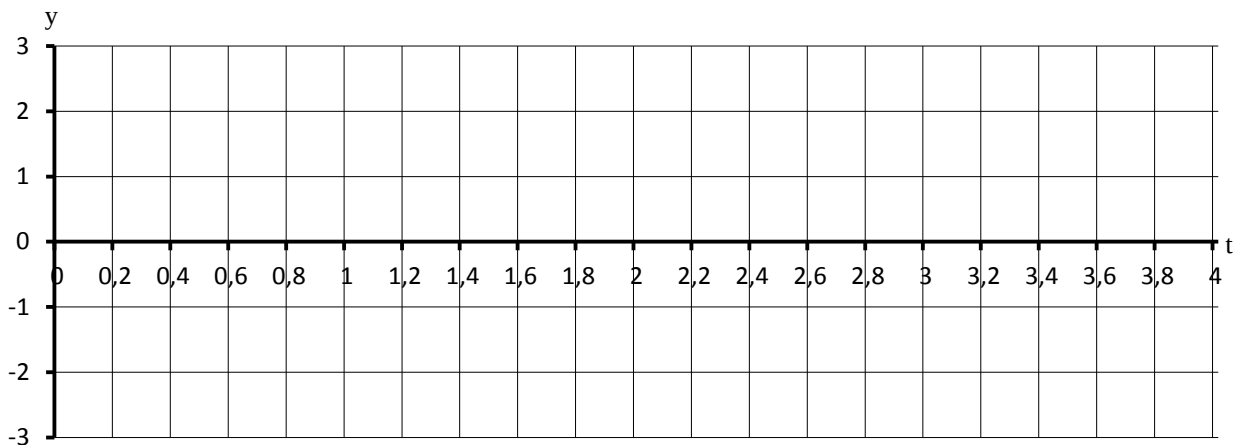
Aufgabe 30: Schwebung (9)

Durch Überlagerung zweier Wellen bzw. Schwingungen ähnlicher Frequenz entsteht eine Schwebung, d.h. eine Schwingung mit typisch sinusförmig zu- und abnehmender Amplitude, die beim Stimmen von Instrumenten und bei der Bestimmung kleiner Frequenzunterschiede in Radarpistolen eingesetzt wird. Die mathematische Erklärung dieser Erscheinung wird durch das folgende Additionstheorem geliefert: $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

- a) Skizziere den Verlauf der folgenden drei Funktionen mit Hilfe des GTR im Bereich $0 \leq t \leq 4$ in die beiden Koordinatensysteme (4) :



$$y_1(t) = \sin(8 \cdot 2\pi t) + \sin(7 \cdot 2\pi t) \text{ und } y_2(t) = 2 \cos\left(\frac{8-7}{2} \cdot 2\pi t\right)$$

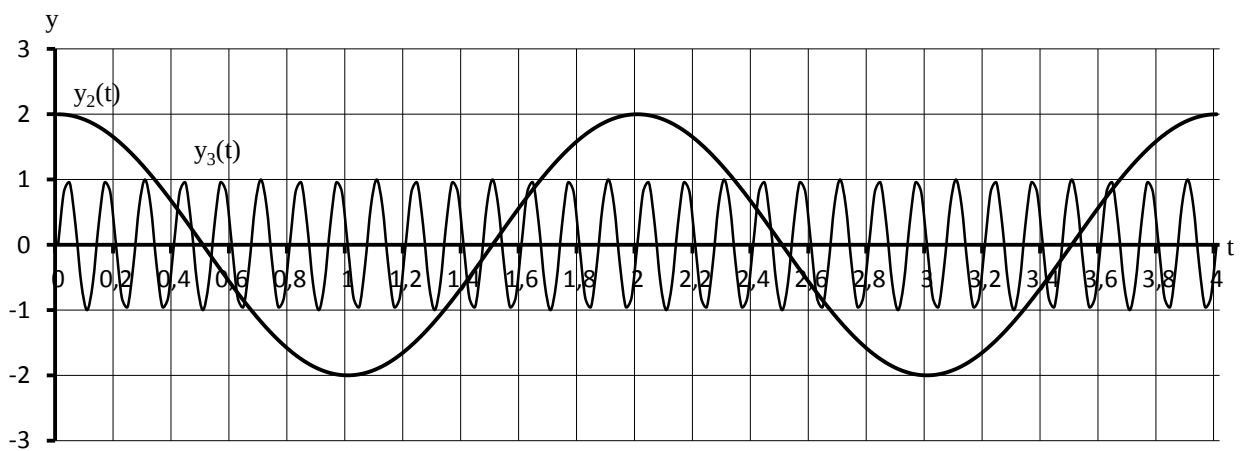
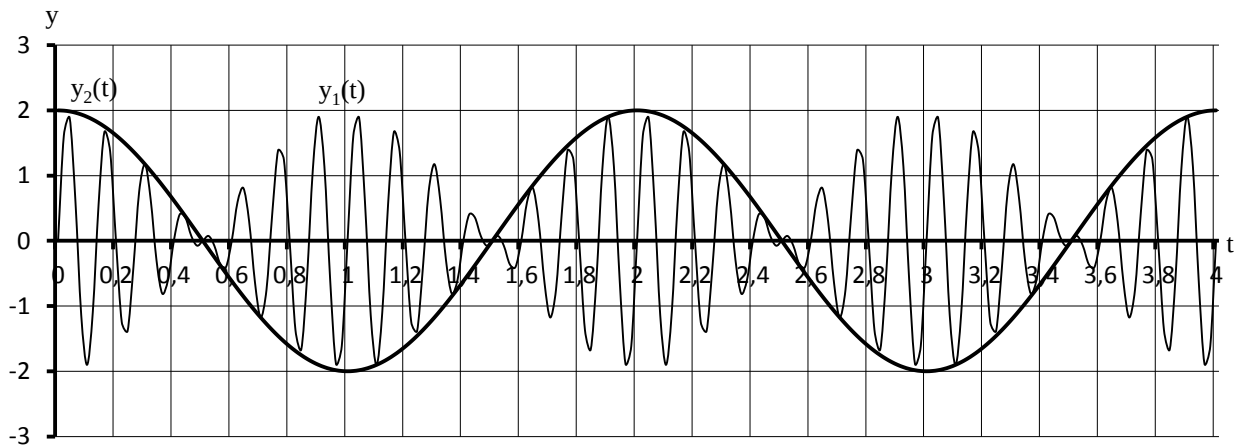


$$y_3(t) = \sin\left(\frac{8+7}{2} \cdot 2\pi t\right) \text{ und nochmal } y_2(t) = 2 \cos\left(\frac{8-7}{2} \cdot 2\pi t\right)$$

- b) Welche Frequenz hat $y_1(t)$? (1)
c) Mit welcher „Schwebungsfrequenz“ nimmt die Amplitude von $y_1(t)$ zu und ab? (1)
d) Welche Frequenz hat die Überlagerung $\sin(f_a \cdot 2\pi t) + \sin(f_b \cdot 2\pi t)$ zweier Schwingungen mit den Frequenzen f_a und f_b ? (1)
e) Mit welcher „Schwebungsfrequenz“ nimmt die Amplitude von $\sin(f_a \cdot 2\pi t) + \sin(f_b \cdot 2\pi t)$ zu und ab? (1)
f) Einem Raser wurde eine Radarwelle mit $f_a = 12$ GHz hinterhergesandt. Die mit f_b reflektierte Welle erzeugt zusammen mit der Sendeschwingung eine Schwebung mit der Schwebungsfrequenz $f_2 = 1$ kHz im Empfänger der Radarpistole. Wie gross war f_b ? (1)

Lösungen:

a) Skizzen (4):



b) $f_1 = \frac{8+7}{2} \text{ s}^{-1} = 7,5 \text{ s}^{-1}$ (1)

c) $f_2 = \frac{8-7}{2} \text{ s}^{-1} = 0,5 \text{ s}^{-1}$ (1)

d) $f_1 = \frac{f_a + f_b}{2}$ (1)

e) $f_2 = \frac{f_a - f_b}{2}$ (1)

f) Aus e) folgt $f_b = f_a - 2f_2 = 11,998 \text{ GHz}$. (1)