

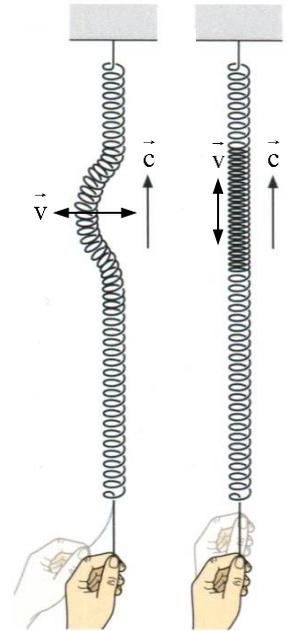
4.2 Wellen

4.2.1 Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit

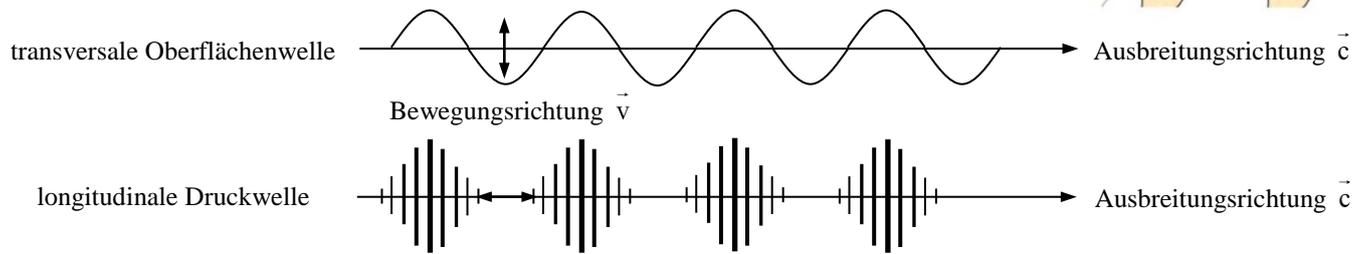
In homogenen Stoffen werden **Impulse** durch (**teil**)**elastische Stöße** zwischen den Teilchen gleichmäßig in alle Richtungen weitergeleitet. Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c solcher Störungen hängt vom Aufbau der Stoffe ab: Je geringer die Abstände und je fester die Bindungen zwischen den Teilchen sind, desto schneller pflanzt sich der Impuls fort. Die **Schallgeschwindigkeit** nimmt daher von Luft (340 m/s) über Wasser (1500 m/s) zu Marmor (6000 m/s) stark zu.

An der Phasengrenze des Stoffes weichen die Teilchen nach außen **senkrecht zur Ausbreitungsrichtung** aus und lassen sich auf dem Wasser oder an einem Gummiband gut beobachten. Da ihre eigene Bewegungsrichtung \vec{v} dann quer zur Ausbreitungsrichtung \vec{c} der Welle steht, spricht man von **Transversalwellen** (siehe Abbildung linke Feder).

Innerhalb gasförmiger und flüssiger Stoffe können Impulse nur **parallel zur Bewegungsrichtung** der Teilchen weitergeleitet werden. **Schallwellen** sind daher **Longitudinalwellen** (siehe Abbildung rechte Feder).



Beispiel: Longitudinale Druckwellen unter Wasser verformen die Phasengrenze zur Luft in **transversalen Oberflächenwellen** über Wasser:



Da sich die Bewegungsrichtung der Teilchen bei jedem **nicht zentralen** Stoß ändert, breiten sie sich in ausgedehnten Körpern trotzdem in alle Richtungen aus.

Die häufigsten Ursachen für Wellen sind **Sinusschwingungen** von Festkörpern wie z.B. Saiten oder Stimmbändern.

Wenn sich eine Sinusschwingung $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(\omega t) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ mit

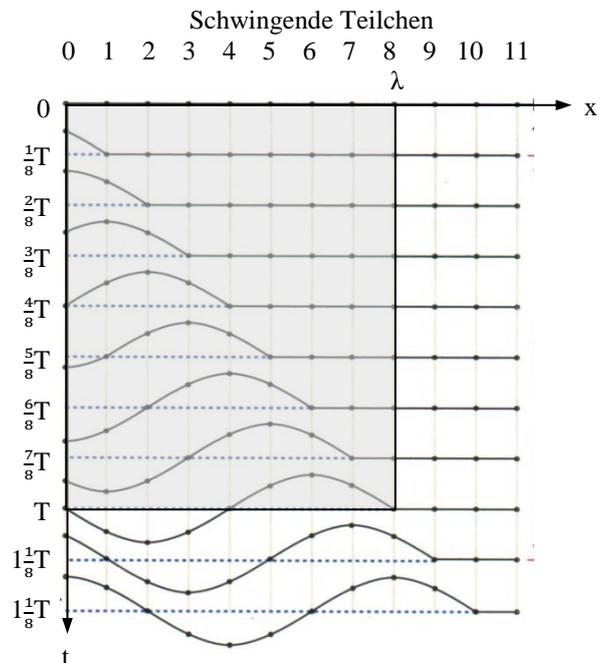
$$\boxed{\text{Frequenz } f = \frac{\omega}{2\pi}} \text{ bzw. } \boxed{\text{Periodendauer } T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

transversal in x -Richtung mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, schwingen die Teilchen im Abstand einer

$$\boxed{\text{Wellenlänge } \lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}}$$

mit der gleichen **Phase**. In der Entfernung x vom Erreger schwingen sie mit der **Verzögerung** $t_0 = \frac{x}{c}$, die die Welle gebraucht hat, um bis zu ihnen vorzudringen. So erhält man die

$$\boxed{\text{Wellengleichung } y(x;t) = \hat{y} \cdot \sin \omega t - t_0 = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)}$$



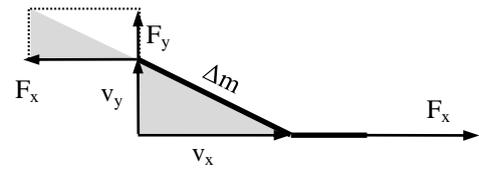
Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr 1 - 4

4.2.2 Die Differentialgleichung der mechanischen Transversalwelle

4.2.2.1 Spannkraft und Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ein mit der **Spannkraft** F_x gespanntes Seil mit **Querschnittsfläche** A und **Dichte** ρ wird durch eine **Transversalkraft** F_y senkrecht ausgelenkt, so dass ein Abschnitt der **Länge** Δx mit der **Masse** $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$ in der Zeit Δt mit der **Transversalgeschwindigkeit**

$$v_y = a_y \cdot \Delta t = \frac{F_y \cdot \Delta t}{\Delta m} = \frac{F_y \cdot \Delta t}{\rho \cdot A \cdot \Delta x}$$



ausgelenkt wird. Dabei bewegt sich die Störung mit der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ in x-Richtung, so dass man

$v_y = \frac{F_y}{\rho \cdot A \cdot v_x}$ erhält. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ergibt sich $\frac{v_y}{v_x} = \frac{F_y}{F_x} \Leftrightarrow v_y = v_x \cdot \frac{F_y}{F_x}$ und durch Gleichsetzen

$v_x \cdot \frac{F_y}{F_x} = \frac{F_y}{\rho \cdot A \cdot v_x}$. Durch Auflösen nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = v_x$ ergibt sich

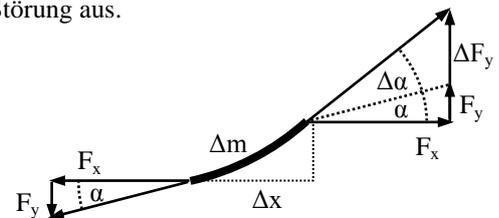
$$c = \sqrt{\frac{F_x}{\rho \cdot A}}$$

Je höher die Spannkraft und je leichter das Seil, desto schneller breitet sich die Störung aus.

4.2.2.2 Spannkraft und Krümmung

Infolge der **Krümmung** des Seilstücks der Länge Δx ändert der **Steigungswinkel** α auf den Wert $\alpha + \Delta\alpha$. Bei nahezu gleicher Spannkraft F_x ändert sich die **Transversalkraft** $F_y = F_x \cdot \tan(\alpha)$ auf den Wert $F_y + \Delta F_y = F_x \cdot \tan(\alpha + \Delta\alpha) \approx F_x \cdot \tan(\alpha) + F_x \cdot \Delta \tan(\alpha)$ und mit $\Delta \tan(\alpha) = \Delta \frac{\partial y}{\partial x}$ erhält man

$$\Delta F_y = F_x \cdot \Delta \frac{\partial y}{\partial x}$$



Die resultierende **Transversalbeschleunigung** ergibt sich dann zu $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_y = \frac{\Delta F_y}{\Delta m} = \frac{F_x \cdot \Delta \frac{\partial y}{\partial x}}{\rho \cdot A \cdot \Delta x}$. Die Änderungsrate der

Steigung $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist die räumliche **Krümmung** $\frac{\Delta \frac{\partial y}{\partial x}}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der Welle. Damit erhält man die **Differentialgleichung der**

mechanischen Welle $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_x}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v_x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und wieder mit der üblichen Bezeichnung $c = v_x$ und Umstellen die Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

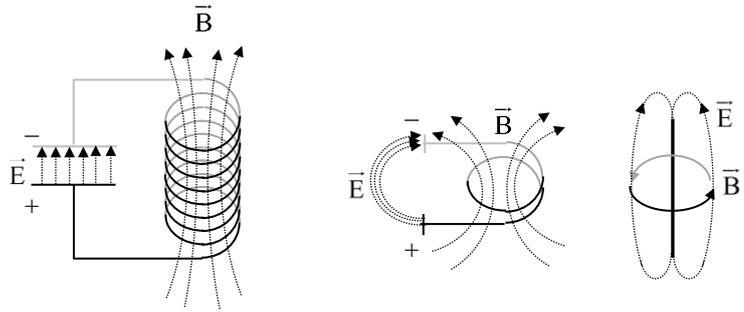
Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr.5

4.2.3 Elektromagnetische Wellen

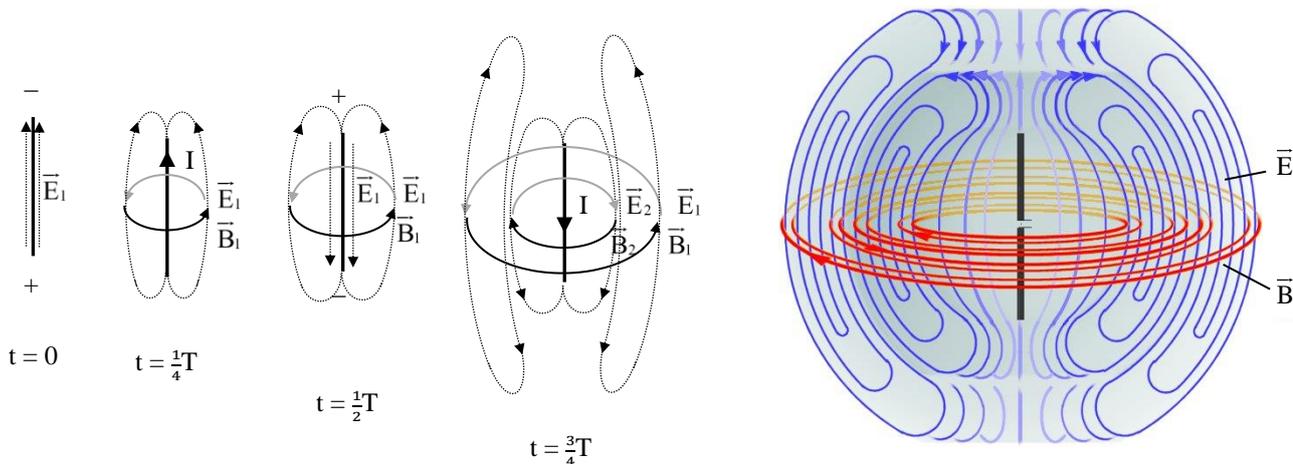
4.2.3.1 Erzeugung

Die wichtigsten Wellen unseres Alltags werden durch **schwingende elektrische Ladungen** erzeugt und heißen elektromagnetische Wellen.

In der Funktechnik verwendet man als Sender einen **Hertzischen Dipol**, den man sich durch **Aufbiegen eines Schwingkreises zu einem geraden Draht** hergestellt denken kann:



Da die Kapazität C und die Induktivität L eines geraden Drahtes sehr gering sind, ist die **Eigenfrequenz** $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ so hoch, dass sich das Wechselfeld vom Draht löst: Der Draht fängt an zu senden und wird zur **Antenne**.



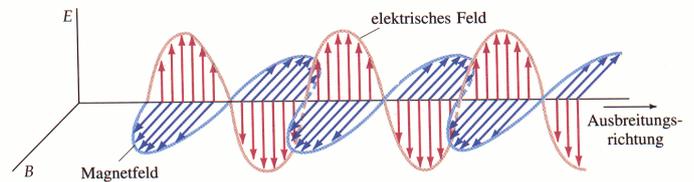
4.2.3.2 Eigenschaften

Der **elektrische Feldvektor** \vec{E} steht

1. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
2. in einer gemeinsamen Ebene mit dem Dipol

Der **magnetische Feldvektor** \vec{B} steht

1. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung
2. senkrecht zum Dipol
3. senkrecht zum \vec{E} -Vektor
4. gleichphasig zum \vec{E} -Vektor



$$\vec{E}_y + \vec{B}_z \quad x; t = \vec{E}_{0y} + \vec{B}_{0z} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

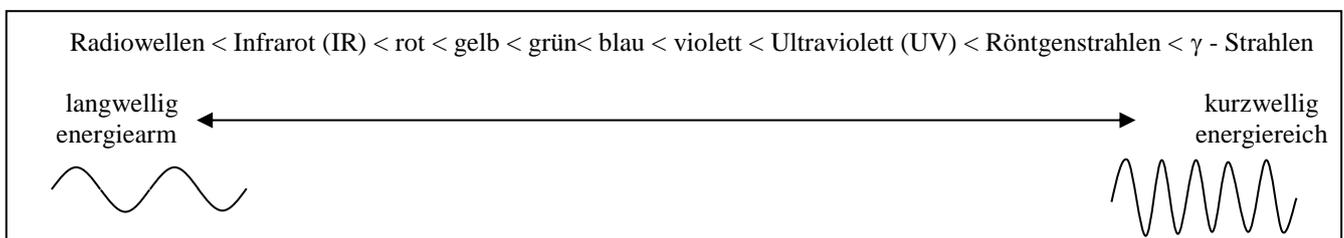
Da beide Feldvektoren senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen, handelt es sich um eine **Transversalwelle**.

Weil die beiden Feldvektoren in ihrer Richtung durch den Dipol und die Ausbreitungsrichtung genau festgelegt sind, spricht man von einer **polarisierten Welle**. Als Folge dieser Polarisation muss die **Empfangsantenne** für optimalen Empfang **parallel** zur **Sendantenne** stehen.

Im Gegensatz zu allen anderen Wellen benötigen elektromagnetische Wellen keine schwingenden Teilchen, da sie ihr eigenes Medium in Gestalt eines **elektromagnetische Wechselfeldes** erzeugen. Elektromagnetische Wellen können sich daher im **Vakuum** ausbreiten und haben dort die immer gleiche **Lichtgeschwindigkeit** von $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$.

4.2.3.3 Das elektromagnetische Spektrum

Die **Energie** einer elektromagnetischen Welle nimmt mit sinkender **Wellenlänge** zu. Aus diesem Grund ist elektromagnetische Strahlung umso gefährlicher, je kürzerwellig die Strahlung ist:



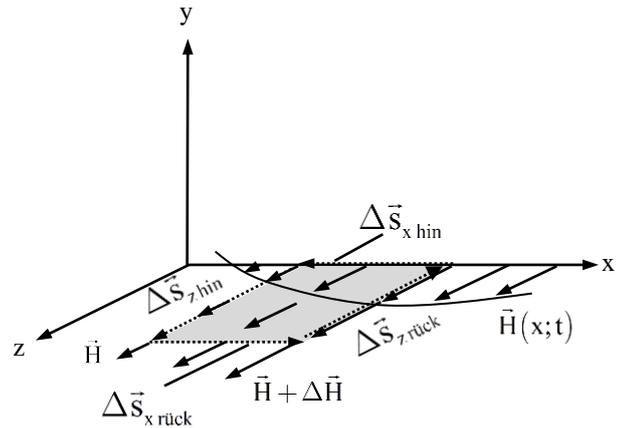
Die Frequenz der schwingenden Ladung nimmt mit wachsender Wellenlänge ab:

1. **Radiowellen** werden durch hin- und her fließende Elektronen in einer Antenne erzeugt.
2. **Wärmestrahlung** kommt durch die Schwingung der kleinsten Bausteine (Moleküle, Ionen, Atome) in Festkörpern zustande.
3. **Sichtbares Licht** wird durch **Außenelektronen** abgestrahlt, deren Energieniveaux enger zusammen liegen.
4. **Röntgenstrahlen** entstehen durch Bewegungen der Elektronen zwischen den **inneren**, weiter auseinanderliegenden Energiestufen der Elektronenhülle erzeugt.
5. **γ -Strahlen** werden durch sehr schnelle Ladungsbewegungen im **Atomkern** erzeugt

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 6

4.2.4 Die Differentialgleichung der elektromagnetischen Welle

Die Summierung $\oint_C \vec{H} * d\vec{s}$ der magnetischen Feldstärke \vec{H} im **Ampèreschen Gesetz** über den in der x-z-Ebene liegenden geschlossenen Weg C = $\Delta\vec{s}_{x\text{hin}} + \Delta\vec{s}_{z\text{hin}} + \Delta\vec{s}_{x\text{rück}} + \Delta\vec{s}_{z\text{rück}}$ bezieht sich auf das **Skalarprodukt**, so dass die Wirkung nur auf den Wegstücken $\Delta\vec{s}_{z\text{hin}}$ **parallel** zu \vec{H} mit $\vec{H} * d\vec{s} = H \cdot \Delta s_z > 0$ bzw. auf $\Delta\vec{s}_{z\text{rück}}$ **antiparallel** zu \vec{H} mit $\vec{H} + \Delta\vec{H} * \Delta\vec{s}_{z\text{rück}} = -(H + \Delta H) \cdot \Delta s_z < 0$ zustande kommt. Auf den Wegstücken $\Delta\vec{s}_{x\text{hin}}$ und $\Delta\vec{s}_{x\text{rück}}$ **orthogonal** zu \vec{H} verschwindet das Skalarprodukt, so dass man das folgende Ergebnis für die **linke** Seite des Ampèreschen Gesetzes erhält:



$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} * d\vec{s} &= \int_{\Delta\vec{s}_{x\text{hin}}} \vec{H} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{z\text{hin}}} \vec{H} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{x\text{rück}}} \vec{H} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{z\text{rück}}} \vec{H} * d\vec{s} \\ &= 0 + H \cdot \Delta z + 0 - (H + \Delta H) \cdot \Delta z \\ &= -\Delta H \cdot \Delta z. \end{aligned}$$

Auf der **rechten** Seite kann man einen Mittelwert $\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t}$ für die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte auf dem

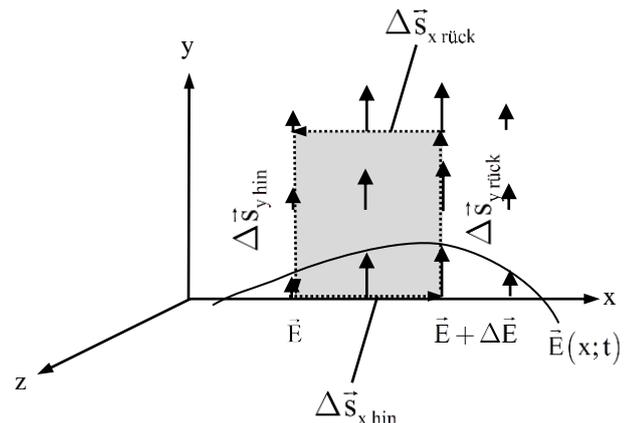
Flächenelement A = $\Delta x \cdot \Delta z$ annehmen und erhält $\oint \dot{D} * dA = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$

Gleichsetzen ergibt $-\Delta H \cdot \Delta z = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{\partial D}{\partial t}}$

Nun wendet man völlig analog das **Faradaysche Induktionsgesetz** an:

Die Summierung $\oint_C \vec{E} * d\vec{s}$ der elektrischen Feldstärke \vec{E} über den in der x-y-Ebene liegenden geschlossenen Weg C = $\Delta\vec{s}_{x\text{hin}} + \Delta\vec{s}_{y\text{hin}} + \Delta\vec{s}_{x\text{rück}} + \Delta\vec{s}_{y\text{rück}}$ ergibt wie oben

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} * d\vec{s} &= \int_{\Delta\vec{s}_{x\text{hin}}} \vec{E} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{y\text{hin}}} \vec{E} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{x\text{rück}}} \vec{E} * d\vec{s} + \int_{\Delta\vec{s}_{y\text{rück}}} \vec{E} * d\vec{s} \\ &= 0 + E \cdot \Delta y + 0 - (E + \Delta E) \cdot \Delta y \\ &= -\Delta E \cdot \Delta y. \end{aligned}$$



Auf der **rechten** Seite kann man einen Mittelwert $\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial t}$ für die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte auf dem

Flächenelement A = $\Delta x \cdot \Delta z$ annehmen und erhält $\oint \dot{B} * dA = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta z$

Gleichsetzen ergibt $-\Delta E \cdot \Delta y = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\partial B}{\partial t}}$

Durch Übergang von endlich großen Δ zu infinitesimal kleinen ∂ erhält man

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

Ersetzen von $D = \epsilon_0 E$ und $H = \frac{1}{\mu_0} B$ ergibt

$$-\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

Ableiten nach x und Vertauschen der Ableitungen führt zu

$$-\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Ableiten links nach t und rechts nach x resultiert in

$$-\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

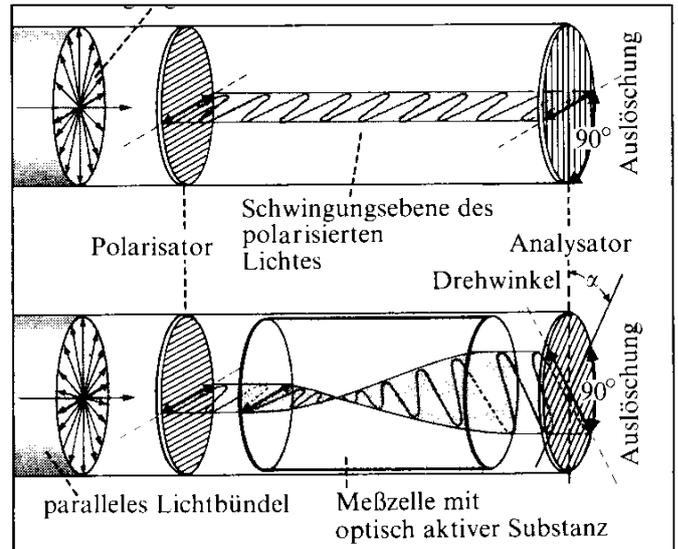
Dies sind die Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Welle mit der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr.7

4.2.5 Polarisation

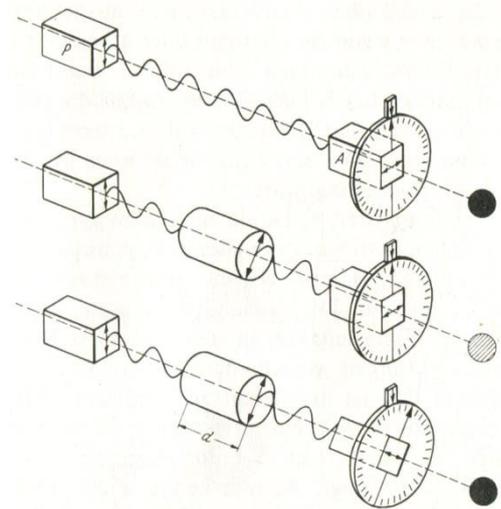
Chirale Verbindungen lassen sich durch ihr Verhalten gegenüber **linear polarisiertem Licht** charakterisieren. Linear polarisiertes Licht lässt sich z. B. durch **Polarisationsfolien** erzeugen, die aus parallel angeordneten Makromolekülen aufgebaut sind. Es wird nur solches Licht durchgelassen, dessen Schwingungsebene parallel zur Vorzugsrichtung der Moleküle in der Folie ist.

Jedes asymmetrische C-Atom dreht die **Schwingungsebene** des Lichtes um einen kleinen Winkel nach rechts (+) oder links (-), der charakteristisch für dieses Atom ist. Je mehr asymmetrische C-Atome das Licht auf seinem Weg durch die Lösung passiert, desto stärker wird die Schwingungsebene gedreht. Der Drehwinkel ist also proportional zur Konzentration c der asymmetrischen C-Atome in der Lösung und zum Weg l , den das Licht durch die Lösung zurücklegt. Den Proportionalitätsfaktor $[\alpha]_D^{20}$ (siehe unten) bezieht man praktischerweise nicht auf einzelne asymmetrische C-Atome, sondern auf die ganzen Moleküle wie z.B. D-Glucose, die eine charakteristische Kombination aus 4 asymmetrischen C-Atomen enthält.



Zur Messung des Drehwinkels verwendet man ein **Polarimeter**, das aus einer **Natriumlampe** als monochromatischer Lichtquelle, einem **Polarisator** zur Herstellung von linear polarisiertem Licht, einer **Messzelle** und einem **Analysator** zur Messung des **Drehwinkels** besteht.

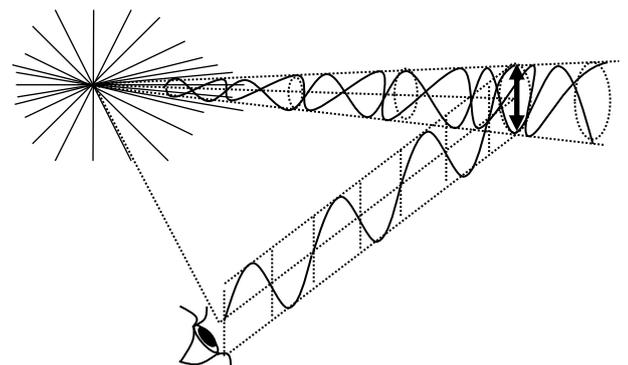
1. Wenn der Analysator parallel zum Polarisator steht, gelangt das linear polarisierte Licht in das Auge des Betrachters. Steht jedoch der Analysator senkrecht zum Polarisator, so findet eine **Auslöschung** statt.
2. Bringt man in dieser Stellung des Analysators die Lösung einer optisch aktiven Substanz in den Strahlengang zwischen Polarisator und Analysator, so tritt eine **Aufhellung** ein, weil die Ebene des polarisierten Lichtes gedreht wird.
3. Der Drehwinkel α wird dadurch gemessen, dass man den Analysator so weit dreht, bis wieder **Auslöschung** eintritt.



Polarisationsbrillen

Jeder Mensch sieht am Himmel immer nur die senkrecht polarisierte Komponente des gestreuten blauen Lichtes, da nur solche Oszillatoren in seine Richtung reflektieren können, die senkrecht zu der Ebene stehen, die aus Sonne, Oszillator und Beobachter gebildet wird.

Gute **Sonnenbrillen** haben daher ein senkrechtes Streifenmuster auf dem Glas, so dass nur das **senkrecht polarisierte gestreute Licht** des blauen Himmels, nicht aber die waagrecht polarisierte Komponente des direkten Sonnenlichts ins Auge gelangt.



Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 8

4.2.6 Der Dopplereffekt

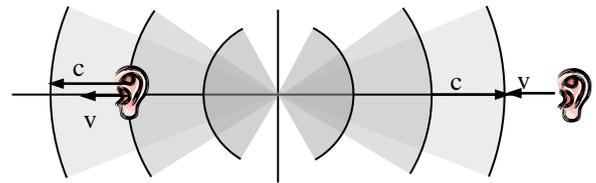
4.2.6.1 Bewegter Empfänger

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c bezogen auf den Empfänger ändert sich auf

$$c' = c \pm v$$

Die vom Empfänger wahrgenommene **Periodendauer** ist dann

$$T' = \frac{\lambda}{c'} = \frac{T}{1 \pm \frac{v}{c}}$$



ruhender Sender

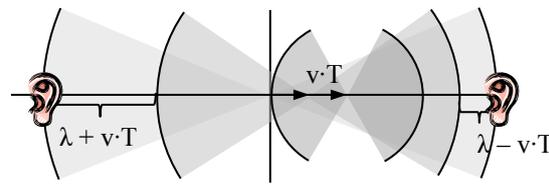
4.2.6.2 Bewegter Sender

Von einem Wellenberg zum nächsten hat der Sender die Strecke $v \cdot T$ zurückgelegt, so dass sich der Abstand zwischen den Wellenbergen bzw. die **Wellenlänge** zu

$$\lambda' = \lambda \pm v \cdot T$$

ändert. Die vom Empfänger wahrgenommene **Periodendauer** ist dann

$$T' = \frac{\lambda'}{c} = T \cdot \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$



bewegter Sender

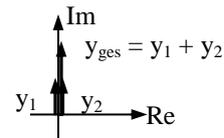
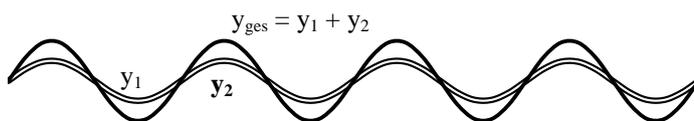
Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 9 - 13

4.2.7 Interferenz

Die Überlagerung von Wellenzügen nennt man **Interferenz** (lat. *inter* = *zwischen*, *ferre* = *machen, tun, herstellen*). Die Interferenz der Auslenkungen zweier **phasenverschobenen** Wellen lässt sich wie in der **Wechselstromtechnik** einfach durch graphische Addition der komplexen Auslenkungen im **Zeigerdiagramm** darstellen:

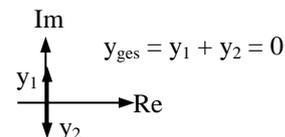
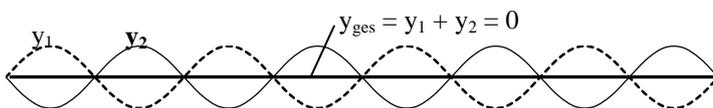
Konstruktive Interferenz:

Bei **gleicher Phase** ($\varphi = 0^\circ$) treffen Wellenbauch auf Wellenbauch und Wellental auf Wellental: Die Wellen **verstärken** sich:

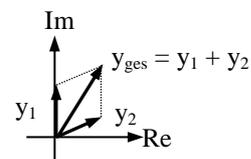
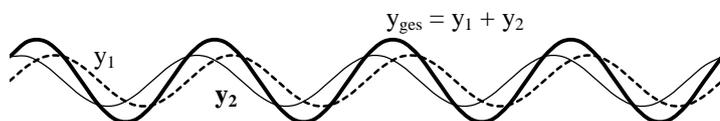


Destruktive Interferenz:

Bei **entgegengesetzter Phase** ($\varphi = 180^\circ$) trifft Wellenbauch auf Wellental: Die Wellen **löschen** sich aus:



Bei **anderen Phasenverschiebungen** φ muss man graphisch addieren:



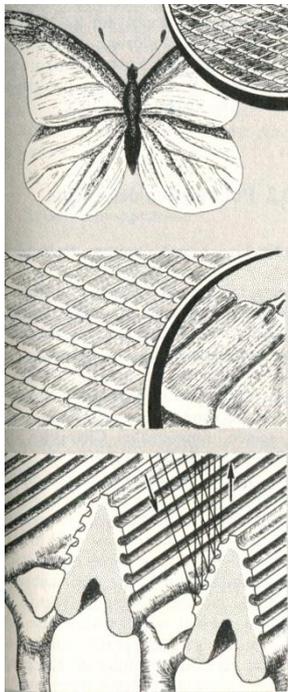
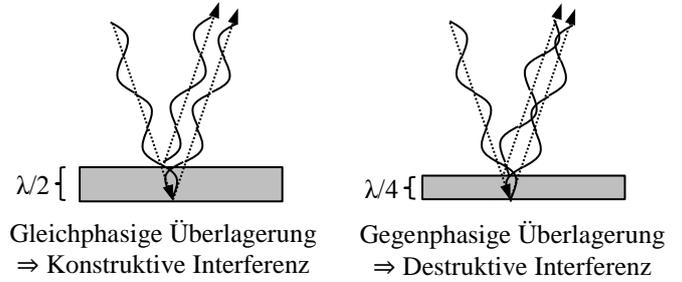
Interferenzfarben

Der schillernde Effekt einer **Öllache** und anderer dünner Schichten entsteht durch die Interferenz von zwei reflektierten Wellenzügen an der Oberseite und an der Unterseite der Schicht. **Falls an beiden Seiten der gleiche Phasensprung auftritt**, (siehe 4.2.7) **verstärkt** sich die Farbe, deren halbe Wellenlänge genau zwischen die beiden Schichten passt, so dass für Hin- und Rückweg ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge auftreten: Die **Schichtdicke** muss ein **ganzzahliges Vielfaches** der **halben Wellenlänge** sein:

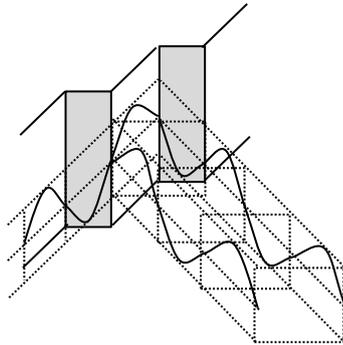
$$2 \cdot d = n \cdot \lambda \text{ bzw. } d = \frac{1}{2} n \lambda.$$

Für **Auslöschung** muss auf Hin- und Rückweg insgesamt eine halbe Wellenlänge dazukommen, also

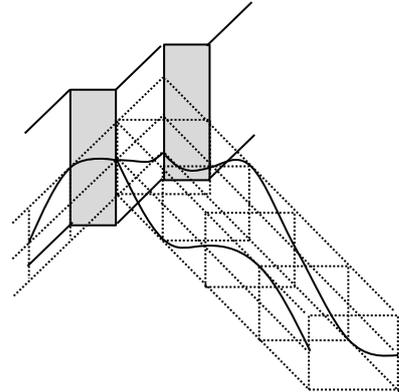
$$2 \cdot d = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \text{ bzw. } d = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda.$$



Die schillernden Farben von **Schmetterlingen** und **Vögeln** kommen nicht durch chemische Farbpigmente zustande, sondern durch **Interferenz**: Die Oberfläche ihrer Federn bzw. Flügel besteht aus winzigen **Stufen** mit **reflektierenden Trittflächen**, deren **Höhenunterschied** genau der **Wellenlänge** (oder einem ganzzahligen Vielfachen) der gewünschten Farbe entspricht. Nur bei dieser Farbe sind die reflektierten Strahlen gleichphasig und verstärken sich. Alle anderen Wellenlängen werden mehr oder weniger stark ausgelöscht. Bei **schräg** einfallenden Strahlen ist der Höhenunterschied größer und die Wellenlänge der verstärkten Farbe **verschiebt** sich. Die Farbe ändert sich also je nach Betrachtungswinkel, wodurch der **schillernde** Effekt zustande kommt. Bei **gleichphasiger Reflexion** (siehe aber 4.2.7!) gelten die gleichen Bedingungen wie bei der Interferenz an dünnen Schichten:



Konstruktive Interferenz
an Stufen mit Höhe $\lambda/2$



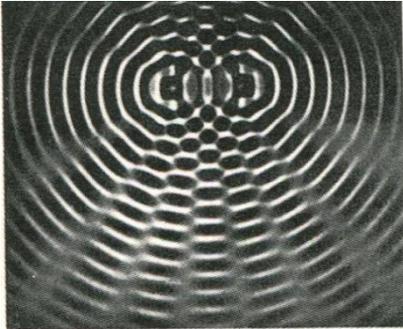
Destruktive Interferenz
an Stufen mit Höhe $\lambda/4$

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 14 - 15

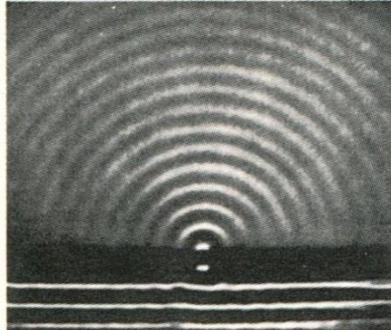
4.2.8 Wellen im Raum: das Huygenssche Prinzip

Der niederländische Physiker **Christiaan Huygens** (1629 – 1695) nutzte das nach ihm benannte Prinzip der von vielen schwingenden Teilchen (**Erregern**) ausgelösten **Kreis- bzw. Kugelwellen**, welche sich zu geradlinigen **Wellenfronten** überlagern, zur Erklärung der **Reflexions-, Brechungs- und Beugungseigenschaften** des Lichtes. Als Bürger der unabhängigen „zeven Provincien“ war er ebenso wie Newton in England vor der spanischen Inquisition geschützt und konnte seine bahnbrechenden Forschungen im Gegensatz zu österreichischen und deutschen Kollegen ungestört verfolgen.

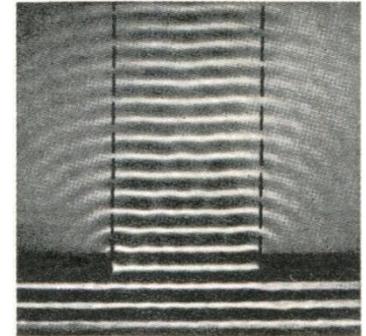
Beispiele:



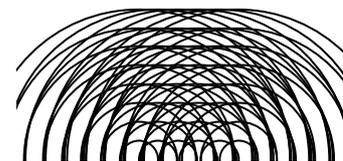
Interferenz zweier Kreiswellen



Entstehung einer Kreiswelle aus einer Wellenfront, die durch ein Loch dringt. Die neue Kreiswelle breitet sich in alle Richtungen aus, auch entgegengesetzt zur ursprünglichen Wellenfront.



Beugung am Rand eines Hindernisses durch neue Kreiswellen.

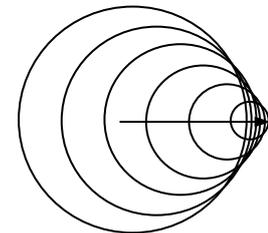


4.2.8.1 Wellenfronten

Gerade Wellenfronten z.B. der Meereswellen bei Windstille entstehen durch Interferenz vieler Kreiswellen, die von den Wassermolekülen in alle Richtungen ausgesandt werden.

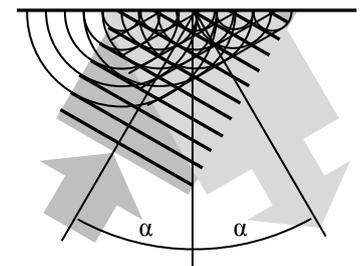
4.2.8.2 Bugwelle und Machscher Kegel

Schiffe, die schneller als die **Wellengeschwindigkeit** fahren und Flugzeuge, die schneller als **Schallgeschwindigkeit** fliegen, ziehen einen Kegel von **Wellenfronten** hinter sich her, welche durch **Interferenz** verstärkt werden und am Ufer bzw. am Boden als deutlicher Wellenschlag bzw. Knall zu spüren sind:



4.2.8.3 Reflexionsgesetz (vgl. 0.2.)

Wellenfronten, die im Winkel α zur Senkrechten auf eine Ebene treffen, werden im gleichen Winkel α reflektiert, weil die zuerst eintreffenden Abschnitte auch zuerst reflektiert werden und dadurch einen Vorsprung erhalten:



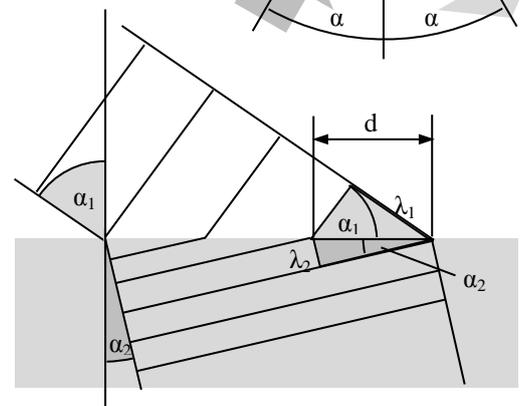
4.2.8.4 Brechungsgesetz (vgl. 0.3.)

Wie in 4.2.1. schon erwähnt, ist die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c abhängig vom Stoff, den die Welle durchdringen muss.

Beim Übergang von einem Stoff mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c_1 in einen zweiten Stoffe mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c_2 bleiben die **Frequenz f** bzw. die **Periodendauer T** der schwingenden Teilchen gleich. Die **Wellenlänge** verringert sich daher im gleichen Verhältnis wie die Lichtgeschwindigkeit: $T = \frac{c_1}{f} = \frac{c_2}{f}$. Aus den gefärbten Dreiecken

ergibt sich für die **Lotwinkel** α_1 und α_2 zunächst $\frac{\lambda_1}{\sin(\alpha_1)} = d = \frac{\lambda_2}{\sin(\alpha_2)}$

und damit das **Brechungsgesetz** $\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2}$.



Anschaulich wird der Lichtstrahl infolge der **Bremswirkung** auf der Innenseite des Strahls in den optisch dichteren Stoff hinein abgelenkt. (**Fermatsches Prinzip** nach *Pierre de Fermat* 1605 – 1665) Umgekehrt wird der Lichtstrahl beim schrägen Übergang in den **optisch dünneren** Stoff mit kleinerer Brechzahl infolge der **Beschleunigung** auf der Außenseite des Strahls zur Begrenzungsfläche hin abgelenkt

4.2.9 Phasenwechsel bei Reflexion und Brechung

Trifft eine elektromagnetische Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c und Feldvektor E auf eine Phasengrenze zu einem Medium, welches eine andere Wellengeschwindigkeit c' vorgibt, so teilt sich die ursprünglich kugelförmige Elementarwelle des Oszillators in eine **reflektierte** Halbkugel mit Feldvektor E_r und Geschwindigkeit c sowie eine **gebrochenen** Halbkugel mit **Feldvektor** E_g und **Geschwindigkeit** c' . Aus dem **Kräftegleichgewicht** im Oszillator ergibt sich nach 3.1.5.1, dass die Summe der Feldstärken auf beiden Seiten gleich sein muss:

$$\boxed{\text{Impulserhaltung } E + E_r = E_g}$$

Die nach 3.1.6.7 in der Zeit t dem Volumen $V = A \cdot s$ mit Querschnittsfläche A und Länge s bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $\frac{s}{t} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ zugeführten

$$\text{Energie } \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot V}{t} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \cdot \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot A \text{ bleibt}$$

ebenfalls erhalten:

$$\boxed{\text{Energieerhaltung } E^2 \cdot \sqrt{\epsilon} = E_r^2 \cdot \sqrt{\epsilon} + E_g^2 \cdot \sqrt{\epsilon'}}$$

Aus

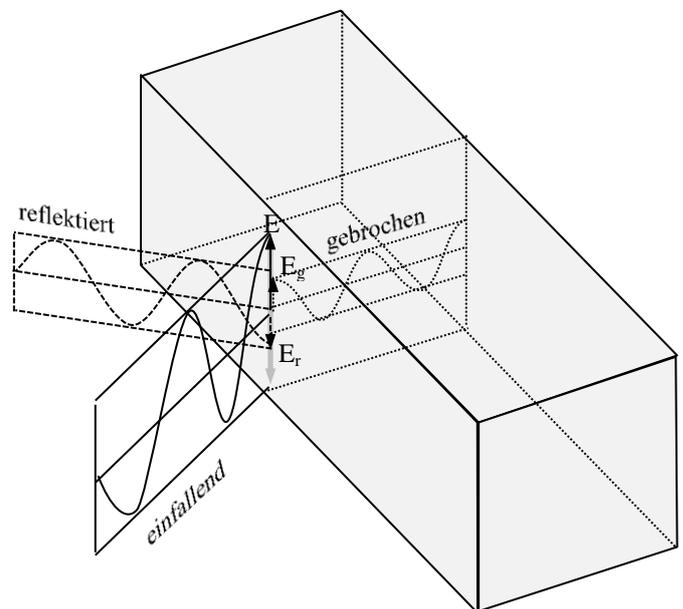
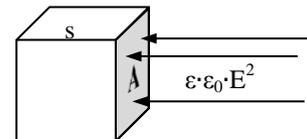
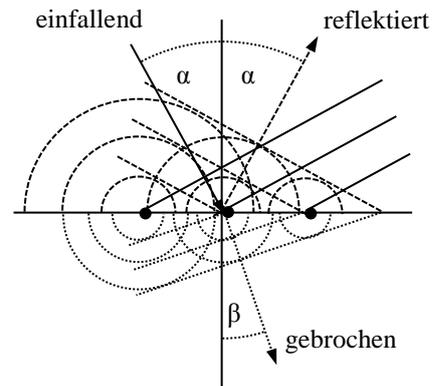
$$\begin{aligned} (E + E_r) \cdot (E - E_r) \cdot \sqrt{\epsilon} &= (E^2 - E_r^2) \cdot \sqrt{\epsilon} \\ &= E_g^2 \cdot \sqrt{\epsilon'} \\ &= (E + E_r)^2 \cdot \sqrt{\epsilon'} \end{aligned}$$

folgt

$$(E - E_r) \cdot \sqrt{\epsilon} = (E + E_r) \cdot \sqrt{\epsilon'}$$

bzw. die

$$\boxed{\text{Fresnel-Gleichung } \frac{E - E_r}{E + E_r} = \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{c'}}$$



(Nach Augustin Fresnel 1788 - 1827, der diese Gleichung ohne Kenntnis der Wellentheorie auf sehr viel kompliziertere Art bereits 1822 abgeleitet hatte) Bei Reflexion am **dichteren** Medium mit $c' < c$ wie z.B. Metallplatte oder Spiegel muss $E + E_r < E - E_r$ bzw. $E_r < 0$ sein: Die Welle wird mit anderem Vorzeichen bzw. wegen $-\sin(\alpha) = \sin(\alpha + \pi)$ mit einem **Phasensprung** von π bzw. einer halben Periode bzw. einer halben Wellenlänge reflektiert. Bei Reflexion am **dünnere** Medium und bei Brechung findet dementsprechend **kein Phasensprung** statt:

$$\boxed{\text{Reflexion am dichteren Medium: Phasensprung } \Delta\alpha = \pi \text{ („festes Ende“)}}$$

$$\boxed{\text{Brechung und Reflexion am dünnere Medium: kein Phasensprung } \Delta\alpha = 0 \text{ („loses Ende“)}}$$

Beachte, dass die Intensität bzw. Feldstärke beim Austritt aus einem dichten Medium zunimmt: Das Licht einer Lampe unter Wasser erscheint über dem Wasser heller als unter Wasser. Die Phasensprünge lassen sich auch auf Transversal- und Longitudinalwellen in Körpern übertragen:

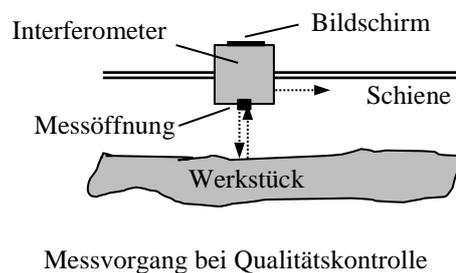
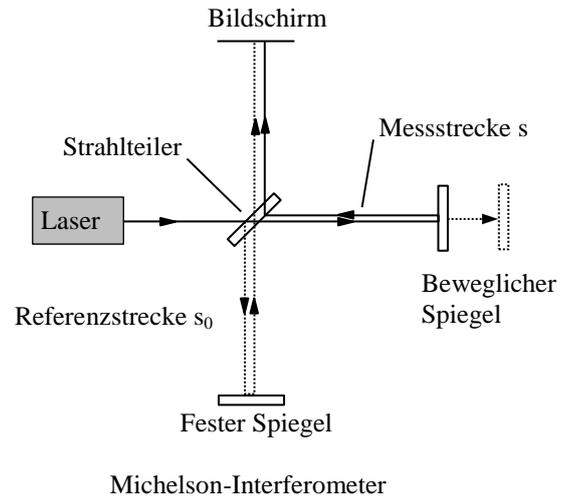
Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 18 -20

4.2.10 Interferometer

Aus der Farbe eines Schmetterlings lässt sich der Stufenabstand λ auf seinen Flügeln bestimmen. Man kann die Interferenz also zur extrem genauen Längenmessung einsetzen, was in der Industrie zur **Qualitätskontrolle von Oberflächen** verwendet wird:

Das dazu verwendete **Michelson-Interferometer** teilt einen Lichtstrahl mittels einer **halbdurchlässigen Platte** auf in einen **Referenzstrahl**, der eine feste Bezugsstrecke durchläuft, und einen **Messstrahl**, der die zu Messstrecke durchläuft.

Nach Reflexion durch jeweils einen Spiegel werden die beiden Strahlen wieder **zusammengeführt**, so dass man durch **Auszählen der Interferenzstreifen beim langsamen Durchlaufen der Messstrecke** den Phasenunterschied und damit die Länge der Messstrecke bestimmen kann:



Referenz s_0	Messstrecke s	Phasendifferenz $2(s - s_0)$	Bildschirm
100λ	100λ	0	Hell
	$100,25 \lambda$	$0,5 \lambda$	Dunkel
	$100,5 \lambda$		
	$100,75 \lambda$		
	101λ		

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr. 21 und 22

4.2.11 Beugung am Doppelspalt

Wenn die vom Meer kommenden Wellen durch eine Insel oder Schluchten auf dem Meeresboden **geteilt** werden, erzeugen sie auf der Leeseite abwechselnd trügerisch stille Bereiche und sehr hohe und von Seglern gefürchtete **Kreuzwellen**.

Die gleiche Erscheinung tritt bei **Schallwellen** auf: Geht man an zwei nebeneinander aufgestellten **Lautsprechern** vorbei, die das gleiche Tonsignal senden, so wird der Ton abwechselnd lauter und leiser.

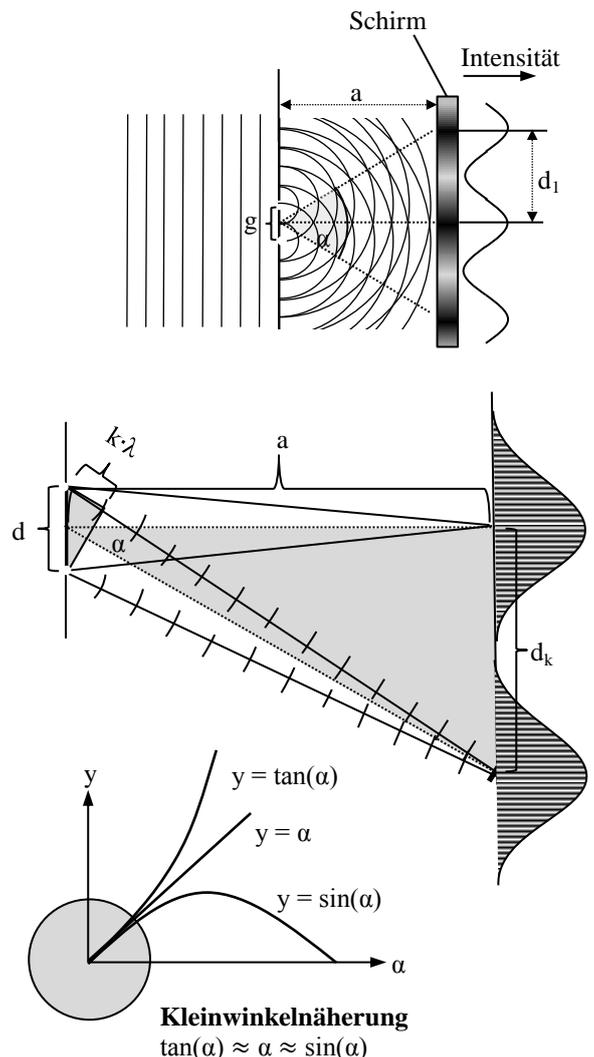
Richtet man einen **Laser** mit **kohärentem** Licht, dessen Elementarwellen alle in der gleichen **Wellenlänge λ** und Phase schwingen, auf zwei Spalte im **Spaltabstand g** , so erscheinen auf einem Schirm im **Abstand a** hinter dem **Doppelspalt** abwechselnd helle und dunkle Bereiche.

Die maximale **Verstärkung** tritt immer dann im **Winkel α zur Ausbreitungsrichtung**, auf, wenn der Gangunterschied der beiden Wellenfronten ein **ganzzahliges Vielfaches $k \cdot \lambda$ der Wellenlänge** ist, so dass die beiden Wellenzüge in gleicher Phase sind und sich auf dem Schirm verstärken. Die **Intensitätsmaxima** infolge **konstruktiver Interferenz** treten auf, wenn gilt

$$\frac{d_k}{a} = \tan(\alpha) \approx \alpha \approx \sin(\alpha) = \frac{k \cdot \lambda}{g} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Die **Intensitätsminima** infolge **destruktiver Interferenz** treten immer genau dazwischen auf, d.h. wenn die Wellenzüge gegenphasig sind bei

$$\frac{d_k}{a} = \tan(\alpha) \approx \alpha \approx \sin(\alpha) = \frac{(k + \frac{1}{2}) \lambda}{g}$$



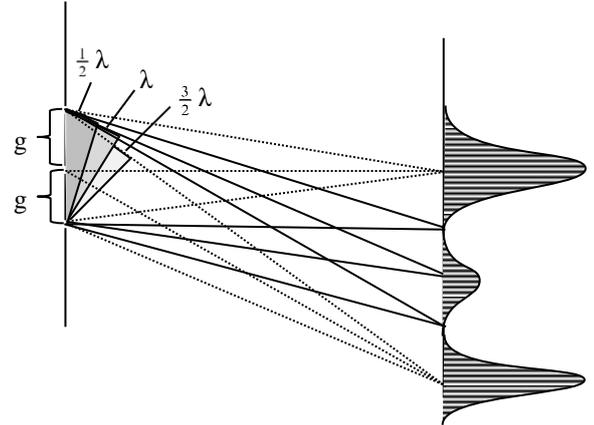
Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr 23 und 24

4.2.12 Beugung am Gitter

Bei einem **Dreifachspalt** erscheinen im Beugungsbild zwischen den durch Interferenz benachbarter Spalte ($1 \leftrightarrow 2$ und $2 \leftrightarrow 3$) erzeugten **Hauptmaxima zusätzlich** Interferenzbilder der Randspalten $1 \leftrightarrow 3$:

1. ein **Nebenminimum** bei $\alpha \approx \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2g} = \frac{\lambda}{4g}$
2. ein **Nebenmaximum** bei $\alpha \approx \frac{\lambda}{2g} = \frac{\lambda}{2g}$
3. ein **Nebenminimum** bei $\alpha \approx \frac{\frac{3}{2}\lambda}{2g} = \frac{3\lambda}{4g}$

Die zusätzlichen Minima lassen die Lage der **Hauptmaxima** unverändert, erzeugen aber ein **schärferes Bild**, da die Maxima schmaler werden. Die zusätzlichen Nebenmaxima jeweils genau zwischen den Hauptmaxima sind schwächer ausgeprägt, da sie nur von zwei Spalten erzeugt werden.



Allgemein kommen mit jedem Spalt ein Nebenmaximum und ein Nebenminimum hinzu ohne die Lage der Hauptmaxima zu ändern. Bei **n Spalten** erhält man also **n - 2 zusätzlich Nebenmaxima** und entsprechend schmalere und schärfere Hauptmaxima.

Häufig ist bei Gittern die Zahl der Striche pro Millimeter angegeben. Den in diesem Fall als **Gitterkonstante** bezeichneten Spaltabstand g erhält man also, indem man einen Millimeter durch die Strichzahl dividiert.

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr 23 – 27

4.2.13 Röntgenbeugung an Kristallen

Zur Untersuchung von Kristallstrukturen setzt man **Röntgenstrahlen** ein, die am **dreidimensionalen Kristallgitter** gebeugt werden.

Wenn man die Röntgenröhre in einem flachen Winkel φ auf das Kristall richtet, wird die Strahlung überwiegend **reflektiert** und die Interferenz findet vorwiegend zwischen den reflektierten Wellen **übereinander** liegender Atome statt, während die Gangunterschiede der von nebeneinander liegenden Atomen reflektierten Wellen so gering sind, dass sie nur sehr kleine Nebenmaxima erzeugen.

Das k -te Hauptmaximum tritt dann unter dem Winkel φ_k auf, für den die **Bragg-Bedingung** $k \cdot \lambda = 2 \cdot g \cdot \sin(\varphi_k)$ erfüllt ist, d.h., wenn

$$\sin(\varphi_k) = \frac{k \cdot \lambda}{2g}$$

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr 30

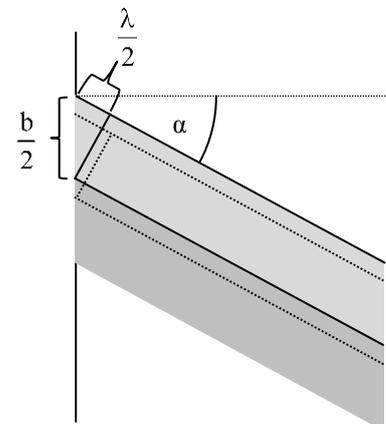
4.2.14 Beugung am Einfachspalt

Auch hinter einem Einfachspalt treten Beugungsbilder welche das **Auflösungsvermögen** von **Fernrohren** und **Mikroskopen begrenzen**, in denen das **Objektiv** als Einfachspalt wirkt.

Beim Einfachspalt der **Breite b** entsteht das **Minimum** durch die **destruktive Interferenz** jeweils **zweier Wellenpakete**, wobei jeder Wellenzug des ersten Paketes einen Wellenzug des zweiten Paketes auslöscht. Die Bedingung für die **Minima** ist daher

$$\frac{d_k}{a} = \tan(\alpha) \approx \alpha \approx \sin(\alpha) = k \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Übungen: Aufgaben zu Wellen Nr 31 – 32



4.2.14 Stehende Wellen

Unter bestimmten **Resonanzbedingungen**, wie sie z.B. in einer gut konstruierten Antenne, einem Musikinstrument oder einem Konzertsaal angestrebt werden, überlagern sich die hinlaufende und die zurücklaufende Welle nach der Reflexion zu einer **stehenden Welle**. Die Interferenz der **hinlaufenden Welle**

$$y_1 = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

mit der um die Zeit $t_0 = \frac{a}{c}$ verzögert und mit **Phasensprung** π vom Spiegel in der Entfernung $x_0 = a$ **zurücklaufenden Welle**

$$y_2 = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(-\frac{(x-x_0)}{\lambda} - \frac{(t-t_0)}{T}\right) - \pi\right) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{a}{c \cdot T} - \frac{1}{2}\right)\right) = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{2a}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Im Fall von $\frac{2a}{\lambda} - \frac{1}{2} = n \in \mathbb{N}$ kann man diese beiden Summanden aufgrund der **Periodizität** in der Sinusfunktion weglassen.

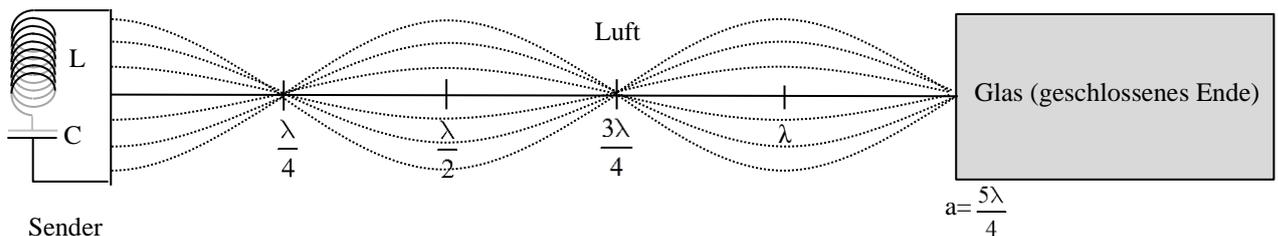
Dann ist der Resonanzkörper ein ungeradzahliges Vielfaches eines Viertels der Wellenlänge und man nennt diesen Fall die

$$\text{Resonanzbedingung } a = 2n + 1 \cdot \frac{\lambda}{4}$$

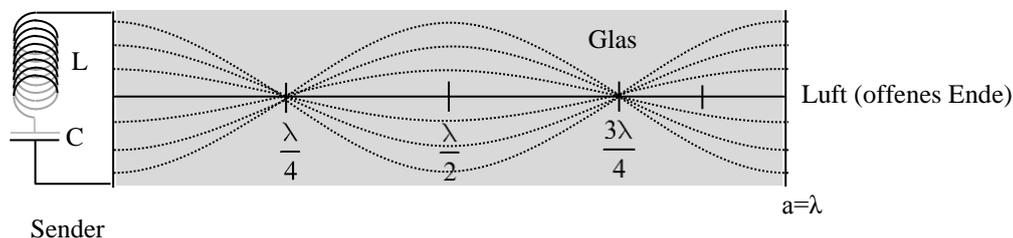
Die Interferenz führt dann mit dem **Additionstheorem** $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ auf

$$y_1 + y_2 = \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) + \hat{y} \cdot \sin\left(2\pi\left(-\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) = -2 \cdot \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Die resultierende Welle schwingt mit **doppelter Amplitude** und gleichsinnig **ohne Phasenverschiebung**:



Trifft eine in einem optisch **dichten** Material wie z.B. Glas laufende Welle auf ein optisch dünneres Material wie z.B. Luft, welches **keine** schwingungsfähige Erreger enthält, so beobachtet man eine **Reflexion** einer Welle am **offenen Ende**, die im Fall der **Resonanzbedingung** $a = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ wieder zu einer **stehenden Welle** führt:



Anwendungen:

1. Stehende Wellen werden bei Musikinstrumenten, Konzertsälen, Oszillatoren in Sendern und Empfängern von Radargeräten, Mobilfunkgeräten, Mikrowellen, und Röntgenapparaten durch Beachtung der Resonanzbedingungen bewusst erzeugt, um maximale Amplituden bzw. **Abstrahlungsleistung** zu erreichen.
2. Die verdoppelte Amplitude erzeugt bei anhaltender Erregung bei der nächsten Reflexion erneut eine Verdopplung und führt bei fehlender Dämpfung schnell zur **Resonanzkatastrophe**. Auch bei vorhandener Dämpfung kann sie **Materialermüdung** und **Zerstörung** des Bauteils verursachen. Die Vermeidung der Resonanz ist an Brücken (Zugseile), Schiffen (Rumpflänge und metazentrische Höhe), Flugzeugen (Flügel), Eisenbahnen (Drehgestelle) und Autos (Achsen) eine wichtige Rahmenbedingung der Konstruktion. Da die Resonanzbedingungen komplexer Körper schwierig zu berechnen sind, müssen oft nachträglich die Abmessungen verändert oder zumindest **Dämpfer** eingebaut werden.
3. Dreidimensionale stehende **Elektronenwellen** sind die Grundlage der Beschreibung der Eigenschaften von Halbleiterelementen in **Sensoren** und **Mikroprozessoren** mit Hilfe der **Quantenmechanik**