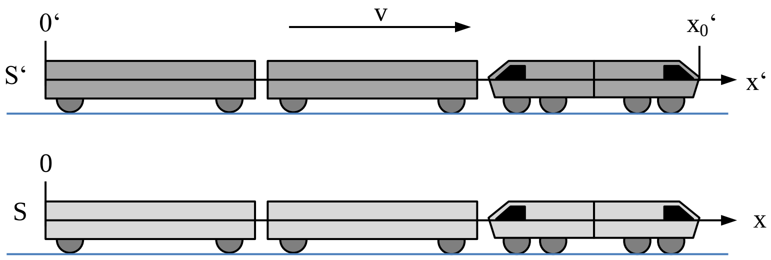
6. Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie

Aufgabe 1: Inertialsysteme

Der Ursprung des Koordinatensystems S‘ sitzt am hinteren Ende eines x_0‘ = 100 m langen, unten dunkel gefärbten Zuges, welcher mit v = 72 km/h in positive x-Richtung fährt. Zur Zeit t = t‘ = 0 passiert S‘ den Ursprung eines ruhenden Koordinatensystems S, welcher sich am Ende eines ebenfalls 100 m langen, hell gefärbten stehenden Zuges befindet. Formuliere die Ort-Zeit-Gleichung der Spitze x_0‘(t‘) bzw. x_0(t) des bewegten Zuges im bewegten System S‘ und im ruhenden System S. Zeichne ein vollständig beschriftetes Ort-Zeit-Diagramm für die ersten 5 Sekunden

a) vom ruhenden System S aus betrachtet
b) vom bewegten System S‘ aus betrachtet

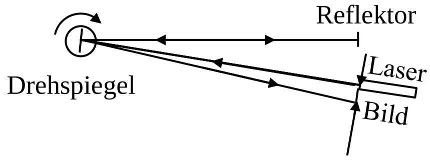
Zeichne die beiden Züge als helle bzw. dunkle Rechtecke zu den Zeiten 1 s, 2 s, 3 s, 4 s und 5 s in die Ort-Zeit-Diagramme ein.



Aufgabe 2: Die Lichtgeschwindigkeit

a) Wie viele Kilometer legt die Erde auf ihrem Weg um die Sonne in 42,5 Stunden zurück, wenn man von einem Abstand von 150 Millionen Kilometern ausgeht?
b) Wie lange braucht das Licht für diese Strecke?
c) Um wie viele Sekunden verlängert sich die beobachtete Umlaufdauer des Jupitermondes Io gegenüber der „Ruhemessung“, wenn sich die Erde geradlinig vom Jupiter weg bewegt?

Aufgabe 3: Die Lichtgeschwindigkeit



a) Bei dem rechts skizzierten Drehspiegelversuch sind Reflektor und Laser jeweils 6 m weit von dem mit f = 3000 Umdrehungen pro Minute rotierenden Drehspiegel entfernt. Um wie viele mm ist das reflektierte Bild vom Laser verschoben, wenn die Lichtgeschwindigkeit c = 300 000 km/s beträgt?
b) Bei der Drehspiegelmethode wird die Zeit indirekt über die Drehzahl des Spiegels bestimmt. Je langsamer sich der Spiegel dreht, desto genauer lässt sich seine Drehzahl einstellen. Zum Ausgleich benötigt man allerdings sehr lange Laufstrecken: Wie schnell muss sich der Spiegel drehen, wenn man für c ≈ 300 000 km/s bei einem Abstand von 15 km zwischen Drehspiegel und Reflektor bzw. 10 m zwischen Drehspiegel und Schirm eine Ablenkung von 10 cm erreichen will?

Aufgabe 4: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich

S stehe in seinem Zug und sendet zur Zeit t = 0 ein Zeitsignal in beide Richtungen aus. Vom hinteren Ende kommt die Antwort nach 5 s, vom vorderen Ende aber erst nach 6 s. Wie lang ist der Zug und wie ist S vom vorderen Ende entfernt? Zeichne das Minkowski-Diagramm zu diesem Vorgang.

Aufgabe 5: Ortslinien (t‘-Achse)

S‘ fliegt zur Zeit t = t‘ = 0 mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung an S vorbei. S sendet zur Zeit t_1 = 0 vom Ursprung x_1 = 0 ein Lichtsignal und zur Zeit t_2 = 6 s am Ort x_2 = 0,5 Lichtsekunden eine zweites Signal aus. Für S‘ sind beide Signale **am gleichen Ort** ausgesandt worden. Wie groß ist die Geschwindigkeit von S‘?

Aufgabe 6: Gleichzeitigkeit und Neigung der Zeitachse des bewegten Systems

S‘ bewegt sich mit v = 0,2 c in positive x-Richtung und passiert S zur Zeit t = t‘ = 0. Im selben Augenblick sendet S‘ in beide Richtungen einen Lichtblitz aus, welches nach 2 Sekunden **von S‘ aus gesehen gleichzeitig** vor und hinter S‘ reflektiert wird.

a) Zeichne die Minkowski-Diagramme **für S und für S‘** zu diesem Vorgang und konstruiere geometrisch die ausgehenden bzw. reflektierten Lichtstrahlen. Bestimme geometrisch die Orte der beiden Spiegel und die Zeiten, zu denen die Lichtblitze reflektiert wurden
b) Zeige jeweils anhand der aus den vier Lichtstrahlen gebildeten Rechtecke, dass die **Ortsachse x‘** (Linie gleicher Zeiten in S‘) jeweils um den gleichen Winkel zur **Ortsachse x** (Linie gleicher Zeiten in S) geneigt ist wie die **Zeitachse t‘** (Linie gleicher Orte in S‘) zur **Zeitachse t** (Linie gleicher Orte in S).
c) Zeichne jeweils die Ortsachse t‘ in der richtigen Neigung ein.

Aufgabe 7: Gleichzeitigkeit und Neigung der Zeitachse des bewegten Systems

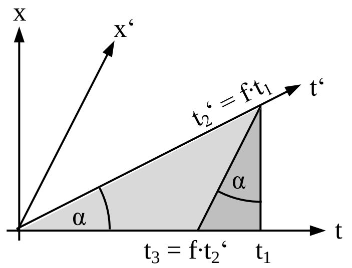
S‘ fliegt zur Zeit t = t‘ = 0 mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung an S vorbei. S sendet zur Zeit t_1 = 0 vom Ursprung x_1 = 0 ein Lichtsignal und zur Zeit t_2 = 8 s am Ort x_2 = 10 Lichtsekunden eine zweites Signal aus. Für S‘ sind beide Signale **gleichzeitig** ausgesandt worden. Wie groß ist die Geschwindigkeit von S‘?

Aufgabe 8: Zeitdilatation 2. Herleitung

In dem rechts gezeichneten Minkowski-Diagramm ist $\tan(\alpha) = \frac{v}{c}$.

Von S aus gleichzeitig betrachtet, steht die Uhr von S auf t_1 und die Uhr von S‘ auf $t_2‘ = f \cdot t_1$.
Von S‘ aus gleichzeitig betrachtet, steht die Uhr von S‘auf $t_2‘ = f \cdot t_1$ und die Uhr von S auf $t_3 = f \cdot t_2‘ = f^2 \cdot t_1$

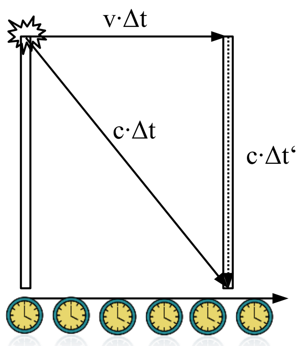
Bestimme den Lorentz-Faktor $f = \sqrt{\frac{t_1}{t_3}}$ mit Hilfe der Seitenverhältnisse des entsprechenden Dreiecks im Abschnitt 6.5.



Aufgabe 9: Zeitdilatation 3. Herleitung

Ergänze den Lückentext und leite die Zeitdilatationsformel $\Delta t‘ = \Delta t \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ nach Pythagoras aus der Skizze her:

Um die bewegte Zeiteinheit Δt‘ mit der ruhende Zeiteinheit Δt zu vergleichen, nehmen wir die 2. Dimension **senkrecht zur Bewegungsrichtung** zu Hilfe und setzen voraus, dass **Längenmaße in diese Richtung unverändert bleiben**. Im Ursprung von S‘ wird dazu ein 1 Lichtsekunde hoher Mast aufgebaut, der zur Zeit t = t‘ = 0 den Ursprung von S passiert. Im selben Augenblick sendet S‘ ein Funksignal von der Mastspitze ab. In S sind eine Reihe von **synchronisierten** Uhren angebracht, an denen der Fuß des Mastes nun vorbeirast. Wenn für S‘ eine Zeitspanne von Δt‘ = 1 Sekunde‘ vergangen ist, erreicht das Funksignal den Mastfuß und von __ **aus betrachtet gleichzeitig** eine der synchronisierten Uhren, welche dann die Zeit Δt anzeigt. Das Funksignal hat dann **von ___ aus betrachtet** die diagonale Strecke c·Δt zum Mastfuß zurückgelegt und **von __ aus betrachtet** die Strecke c·Δt‘ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Dies ist die Folge der **gleichen Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen**. In Bewegungsrichtung entlang der Reihe synchronisierter Uhren hat der Mast die Strecke ____ zurückgelegt.



Aufgabe 10: Zeitdilatation
Die Uhr von S‘ fliegt mit v = 0,6 c an einer Reihe synchronisierter Uhren von S vorbei. Bei $t_1‘ = 2$ s‘ zeigt die gerade passierte ruhende Uhr $t_1 = 3$ s. Bei $t_2‘$ wird eine weitere ruhende Uhr mit $t_2 = 8$ s passiert. Berechne $t_2‘$ und zeichne das Minkowski-Diagramm für diesen Vorgang.

Aufgabe 11: Zeitdilatation
S‘ bewegt sich mit v = 0,8 c in positive x-Richtung und passiert S zur Zeit t = t‘ = 0. Beantworte die folgenden Fragen jeweils sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch in einem Minkowski-Diagramm. Gib außerdem jeweils an, auf welches System sich die Gleichzeitigkeit bezieht.
a) Welche Zeit zeigt die Uhr von S‘, wenn in S die Zeit t = 3 s angezeigt wird?
b) Welche Zeit zeigt die Uhr von S, wenn in S‘ die Zeit t‘ = 3 s‘ angezeigt wird?
c) Welche Zeit zeigt die Uhr von S‘, wenn in S die Zeit t = 5 s angezeigt wird?
d) Welche Zeit zeigt die Uhr von S, wenn in S‘ die Zeit t‘ = 5 s‘ angezeigt wird?

Aufgabe 12: Zeitdilatation
Ruhende Pionen haben eine Halbwertszeit von $T_{1/2} = 26$ ns: Nach 26 ns ist jeweils die Hälfte von ihnen wieder zerfallen. Nach 52 ns ist dann nur noch ein Viertel von ihnen übrig, nach 78 ns ein Achtel usw. Verwendet man bei der Erzeugung der Pionen durch Beschuss von Atomkernen genügend energiereiche Strahlung, so erhalten sie eine Geschwindigkeit von v = 0,99995 c. Der Nachweis von Pionen erfolgt mit einer Blasenkammer, in der sie bei der Kollision mit anderen Teilchen typische Spuren hinterlassen.
a) Bestimme die Halbwertszeit dieser schnellen Pionen im Laborsystem.
b) Zeige, dass die Pionen für die 100 m lange Strecke zwischen Reaktor und Blasenkammer nur 12,8 % der Halbwertszeit aus a) benötigen. Fast alle von ihnen erreichen also die Blasenkammer.
c) Wie viel Prozent der Pionen wäre noch übrig, wenn sie die unter b) berechnete Laufzeit in Ruhe verbringen würden?

Aufgabe 13: Zeitdilatation
Ein Raumschiff S‘ fliegt mit v = 0,8 c von der Erde weg, die es zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$ passiert hat. Die Uhren des Raumschiffes zeigen $t_2' = 30$ Minuten an, als es eine Raumstation passiert, deren Uhren Erdzeit anzeigen und die relativ zur Erde ruht.

a) Zeichne das Minkowski-Diagramm.
b) Welche Zeit zeigt die Uhr der Raumstation bei dem Treffen an?
c) Wie groß ist die Entfernung x_2 zwischen Erde und Raumstation von diesen aus betrachtet?
d) Die Raumstation meldet das Treffen an die Erde. Wann trifft diese Meldung dort ein?

Aufgabe 14: Zwillingsparadoxon
Paul fliegt mit v = 0,8 c zu einem 4 Lichtjahre entfernten Stern, macht schnell ein Erinnerungsfoto und kehrt mit v = −0,8 c wieder zur Erde zurück. Dort hat sein Zwillingsbruder Peter 10 Jahre auf ihn gewartet. Paul hat jedes Jahr seiner Zeitrechnung einen Geburtstagsgruß an Peter geschickt. Zeichne ein Minkowski-Diagramm mit allen Geburtstagsgrüßen und bestimme Pauls Alter bei seiner Rückkehr.

Aufgabe 15: Dopplereffekt
Einem Raumschiff S‘, welches sich mit der konstanten Geschwindigkeit v von der Erde S wegbewegt, werden in periodischen Abständen T_0 Radiosignale hinterhergesandt und von diesem wieder zur Erde zurückgesandt. Zeichne ein Minkowski-Diagramm für $T_0 = 1$ s und v = 0,6 c im Bereich $0 \le t \le 20$ s und $0 \le s \le 10$ c·s und trage die Orts-Zeit-Linien für zwei aufeinanderfolgenden Radiosignale ein. Zeige, dass

a) die Signale aus der Sicht der Erde in Perioden von $T_1 = \frac{T_0}{1-\frac{v}{c}}$ bei dem Raumschiff ankommen.
b) die Signale aus der Sicht des Raumschiffes in Perioden von $T_1' = T_0 \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ bei dem Raumschiff ankommen.
c) die Signale aus der Sicht der Erde in Perioden von $T_2 = T_0 \cdot \frac{c+v}{c-v}$ auf der Erde ankommen.

Aufgabe 16: Längenkontraktion
Wie weit ist die Laufstrecke für die Pionen aus Aufgabe 10?

Aufgabe 17: Längenkontraktion
Ein 2 Lichtsekunden langer Zug S‘ fährt mit v = 0,5 c durch einen ebenfalls 2 Lichtsekunden langen Bahnsteig S, so dass das Zugende $x_1' = 0$ zur Zeit t = t‘ = 0 das Bahnsteigende $x_1 = 0$ passiert.

a) Zeichne jeweils ein Minkowski-Diagramm aus der Sicht des Bahnsteigendes und aus der Sicht des Zugendes.
b) Entlang des Bahnsteiges steht eine Reihe synchronisierter Uhren. An welcher Stelle x_2 steht die Uhr, die zur Zeit t = 0 von der der Zugspitze passiert wird?
c) An der Zugspitze befindet sich ebenfalls eine synchronisierte Uhr. Welche Stelle x_3 auf dem Bahnsteig pasiert diese Uhr zur Zeit t‘ = 0?

Aufgabe 18: Lorentz-Transformationen
S‘ bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0,25 c zum S-System, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit t = t‘ = 0 in Deckung sind. Im S‘-System blitzen die Lampe 1 am Ort $x_1' = 2\cdot10^6$ km zur Zeit $t_1' = 40$ s und die Lampe 2 am Ort $x_2' = -4\cdot10^6$ km zur Zeit $t_2' = 45$ s auf. Berechne die Orte x_1 und x_2 sowie die Zeiten t_1 und t_2 für diese Ereignisse im S-System. Zeichne das Minkowski-Diagramm aus der Sicht von S.

Aufgabe 19: Lorentz-Transformationen
S‘ bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0,6 c zum S-System, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit t = t‘ = 16.10 Uhr in Deckung sind. S beobachtet zur Zeit t_0 = 16.14 Uhr an Ort $x_0 = 8\cdot10^7$ km eine Explosion. Berechne den Ort x_0' und die Zeit t_0' der Explosion von S‘ aus gesehen.

a) mit der Galilei-Transformation
b) mit der Lorentz-Transformation

Aufgabe 20: Lorentz-Transformationen
Der Einstein-Zug S‘ bewegt sich in positive x-Richtung mit der Geschwindigkeit v = 0,6 c zum Bahnhof S, so dass die Ursprünge der Koordinatensysteme am Zugende (x‘ = 0) bzw. der hinteren Bahnsteigkante (x = 0) zur Zeit t = t‘ = 0 in Deckung sind. S‘ gibt zur Zeit t‘ = 0 einen Schuss in positive x‘-Richtung auf die Lokomotive ab. Er stellt fest, dass das Geschoss eine Geschwindigkeit von u‘ = 0,8 c hat und in die Lokomotive einschlägt. Anschließend bestimmt er die Länge des Zuges zu s‘ = 3 Lichtsekunden‘.

a) Stelle den Vorgang im Minkowski-Digramm dar.
b) Welche Zuglänge s misst S?
c) Welche Laufzeit Δt misst S für das Geschoss?
d) Welche Geschwindigkeit u misst S für das Geschoss?

Aufgabe 21: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Ein Fusionsreaktor ist eine kleine Sonne, welche in einer ersten Reaktion Wasserstoffkerne zu Heliumkernen verschmilzt, die dann eine geringfügig kleinere Ruhemasse haben als die ursprünglichen Wasserstoffkerne. Welche Masse m würde solch ein Reaktor verbrauchen, um die 10^6 Liter Wasser eines Swimming-Pools von 4°C auf 22 °C zu erwärmen? Die spezifische Wärmekapazität des Wassers ist $c = 4{,}2\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.

Aufgabe 22: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Die Antenne einer Rundfunkstation strahlt ohne Unterbrechung mit der Leistung P = 1200 W. Welches Massenäquivalent hat die im Laufe eines Tages abgestrahlte Energie

Aufgabe 23: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Mit einem großen Laser kann man einen scharf gebündelten Lichtblitz mit der Energie von 2000 J erzeugen. Zeige, dass der Impuls des Lichtblitzes genauso groß ist wie der Impuls einer mit 120 km/h fliegenden und 0,2 mg schweren Eisensplitters.

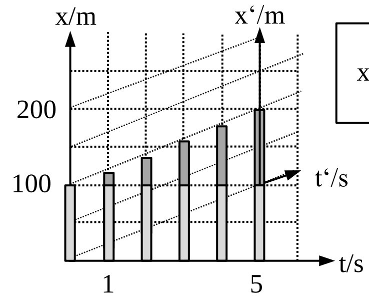
Aufgabe 24: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Um welchen Faktor erhöht sich die Halbwertszeit (≈ Lebenserwartung) von Pionen mit der Ruhemasse $m_0 = 2{,}5\cdot10^{-28}$ kg, die auf eine Energie von 35 MeV beschleunigt wurden?

Aufgabe 25: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Die Geschwindigkeit eines Körpers relativ zum System S ist so groß, dass dieser eine um 20 % verkürzte Länge des Körpers feststellt Mit wie viel Prozent der Lichtgeschwindigkeit bewegt sich der Körper und wie viel Prozent Massenzuwachs stellt S fest?

6. Lösungen zu den Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie

Aufgabe 1: Inertialsysteme

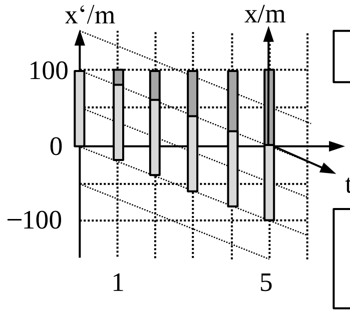
a)



$x_0 = 100\ \mathrm{m} - 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$

$x_0' = 100\ \mathrm{m}$

b)



$x_0' = 100\ \mathrm{m}$

$x_0 = 100\ \mathrm{m} - 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t$

Aufgabe 2: Die Lichtgeschwindigkeit

a) $\Delta s \approx 9{,}42 \cdot$Mio km
b) $\Delta t \approx 16{,}17$ Sekunden
c) ebenfalls um $\Delta t \approx 16{,}17$ Sekunden, denn die minimale Eigenbewegung der Erde in dieser Zeit ist vernachlässigbar.

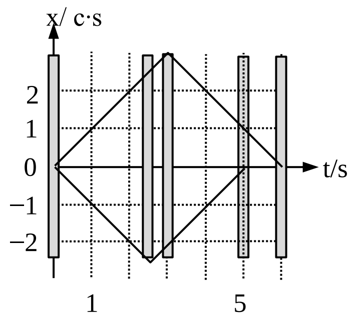
Aufgabe 3: Die Lichtgeschwindigkeit

a) Für Hin- und Rückweg zwischen Drehspiegel und Reflektor benötigt das Licht $\Delta t = \frac{2 \cdot 6\ \mathrm{m}}{300\,000\,000\ \mathrm{m/s}} = 40$ ns. In dieser Zeit hat sich der Drehspiegel und $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-8} = 4\pi \cdot 10^{-6}$ rad weiter gedreht. Der Strahl wird nach dem Reflexionsgesetz um $2\Delta\varphi$ gedreht. Der Bogen auf dem Radius von 6 m ist $\Delta s = r \cdot 2\Delta\varphi = 48\pi \cdot 10^{-4}$ m $\approx 1{,}5$ cm.

b) Die Laufzeit zwischen Drehspiegel und Reflektor ist $\Delta t = \frac{30\ \mathrm{km}}{300\,000\ \mathrm{km/s}} = 0{,}1$ ms. Der Ablenkwinkel ist $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{2r} = 0{,}005$ rad. Der erforderliche Winkelgeschwindigkeit des Drehspiegels ist damit $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = 50$ rad/s und die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 8\ s^{1}$= 480 Umdrehungen pro Minute.

Aufgabe 4: Minkowski-Diagramm und Uhrenabgleich

S steht 3 Lichtsekunden = 900 000 km vom vorderen Ende des 5,5 Lichtsekunden langen Zuges entfernt:



Aufgabe 5: Ortslinien (t‘-Achse)

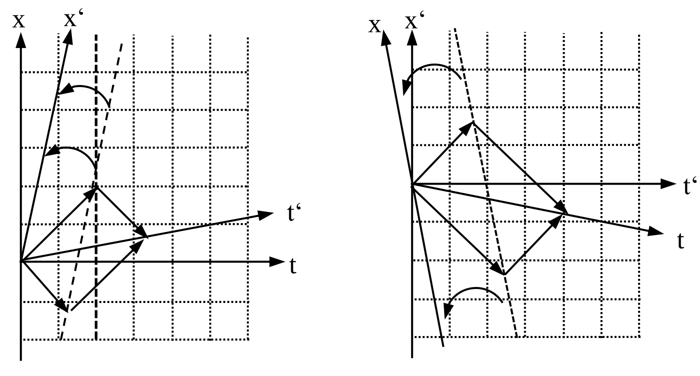
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{12}\ c.$

Aufgabe 6: Gleichzeitigkeit und Neigung der Zeitachse des bewegten Systems

Die Lichtstrahlen bilden ein Rechteck, dessen Diagonalen parallel zur Zeitachse t‘ (Linien gleichen Ortes in S‘) bzw. zur Ortsachse x‘ (Linien gleicher Zeit in S‘) liegen.

Die beiden Diagonalen haben den gleichen Neigungswinkel zu den Lichtstrahlen, welche ihrerseits den gleichen Neigungswinkel von 45° zur waagrechten Zeitachse t bzw. zur senkrechten Ortsachse x haben.

Die beiden Diagonalen x‘ bzw. t‘ sind also um den gleichen Winkel zur x- bzw. t-Achse geneigt.

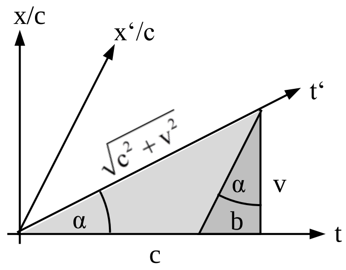


1. Von S aus gesehen: S‘ fliegt in positive x-Richtung: linkes Bild
2. Von S‘ aus gesehen: S fliegt in negative x‘-Richtung: rechtes Bild.

Aufgabe 7: Gleichzeitigkeit

Die Linien gleicher Zeit sind um $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8\text{ s}}{10\text{ c}\cdot\text{s}}\right) = \tan^{-1}(0{,}8)$ zur Senkrechten geneigt. Die Linien gleichen Ortes sind um den gleichen Winkel zur Waagrechten geneigt. Die Geschwindigkeit ist also v = 0,8 c.

Aufgabe 8: Geometrie der Minkowski-Diagramme

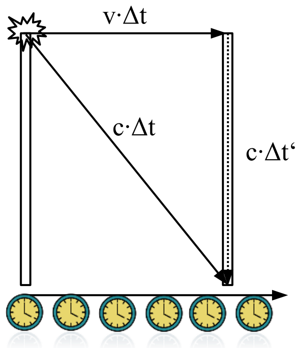


Aus dem Diagramm in Abschnitt 6.5 folgt $b = \frac{v^2}{c}$ bzw. $\frac{b}{c} = \frac{v^2}{c^2}$ (siehe rechts)

Mit den Bezeichnungen in dem ähnlichen Dreieck aus der Aufgabenstellung ergibt sich das Verhältnis $\frac{t_1 - t_3}{t_1} = \frac{b}{c} = \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{t_3}{t_1} = \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{t_3}{t_1} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$.

Wegen $t_3 = f\cdot t_2' = f^2\cdot t_1$ erhält man $f^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Leftrightarrow f = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Aufgabe 9: Zeitdilatation

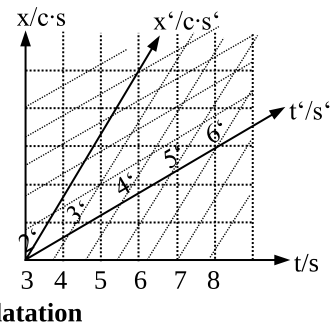


Um die bewegte Zeiteinheit Δt‘ mit der ruhende Zeiteinheit Δt zu vergleichen, nehmen wir die 2. Dimension **senkrecht zur Bewegungsrichtung** zu Hilfe und setzen voraus, dass **Längenmaße in diese Richtung unverändert bleiben**. Im Ursprung von S‘ wird dazu ein 1 Lichtsekunde hoher Mast aufgebaut, der zur Zeit t = t‘ = 0 den Ursprung von S passiert. Im selben Augenblick sendet S‘ ein Funksignal von der Mastspitze ab. In S sind eine Reihe von **synchronisierten** Uhren angebracht, an denen der Fuß des Mastes nun vorbeirast. Wenn für S‘ eine Zeitspanne von Δt‘ = 1 Sekunde‘ vergangen ist, erreicht das Funksignal den Mastfuß und von **S aus betrachtet gleichzeitig** eine der synchronisierten Uhren, welche dann die Zeit Δt anzeigt. Das Funksignal hat dann **von S aus betrachtet** die diagonale Strecke c·Δt zum Mastfuß zurückgelegt und **von S‘ aus betrachtet** die Strecke c·Δt‘ senkrecht zur Bewegungsrichtung. Dies ist die Folge der **gleichen Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen**. In Bewegungsrichtung entlang der Reihe synchronisierter Uhren hat der Mast die Strecke v·Δt zurückgelegt.

Nach Pythagoras ist $(c\cdot\Delta t)^2 = (v\cdot\Delta t)^2 + (c\cdot\Delta t')^2 \Leftrightarrow \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta t')^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t' = \Delta t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

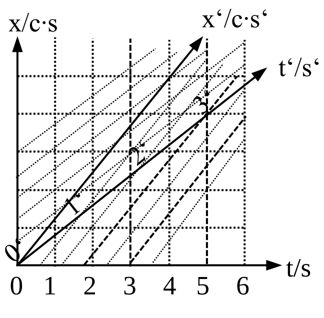
Aufgabe 10: Zeitdilatation

$\Delta t' = \Delta t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5\text{ s}\cdot 0{,}8 = 4\text{ s} \Rightarrow t_2' = 6\text{ s}'$.



Aufgabe 11: Zeitdilatation

a) t‘ = 1,8 s‘: gleichzeitig bezogen auf S
b) t = 1,8 s: gleichzeitig bezogen auf S‘
c) t‘ = 3 s‘: gleichzeitig bezogen auf S
d) t = 3 s: gleichzeitig bezogen auf S‘

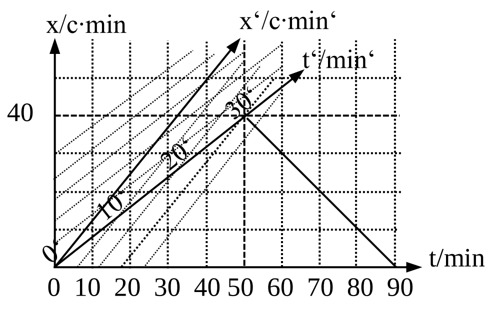


Aufgabe 12: Zeitdilatation

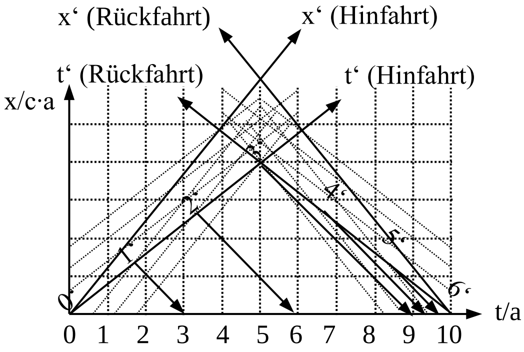
a) $T_{1/2}' \approx 100\cdot T_{1/2} = 2{,}6\ \mu\text{s}$
b) $\Delta t \approx 333{,}5\text{ ns} = 0{,}128\cdot T_{1/2}$.
c) Ihre Zahl würde $\Delta t/T_{1/2} \approx 13$ mal halbiert werden und wäre dann auf $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \approx 0{,}00012 = 0{,}0012$ % geschrumpft!

Aufgabe 13: Zeitdilatation

a) siehe rechts
b) t_2 = 50 Minuten
c) $x_2 = v\cdot t_2$ = 40 Lichtminuten
d) $t_3 = t_2 + \frac{x_2}{c}$ = 90 Minuten



Aufgabe 14: Zwillingsparadoxon
siehe rechts: Paul ist nur um 6 Jahre älter geworden. Da er sein Bezugssystem bei der Umkehr gewechselt hat, sind die Bezugssysteme nicht mehr gleichberechtigt bzw. symmetrisch!

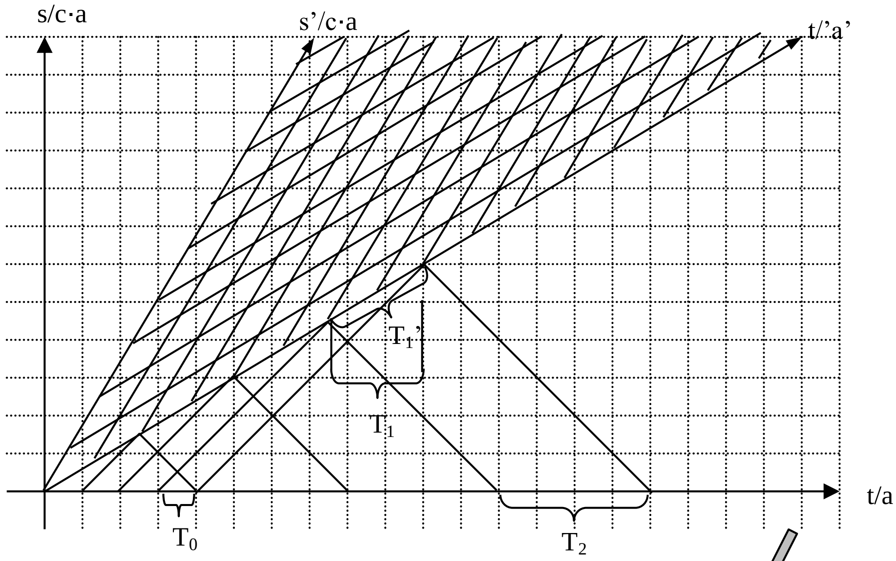


Aufgabe 15: Dopplereffekt

a) Das Radiosignal $x_1(t) = c\cdot(t - T_0)$ trifft das Raumschiff $x_2(t) = v\cdot t$ für
$x_1(T_1) = x_2(T_1) \Leftrightarrow c\cdot(T_1 - T_0) = v\cdot T_0$
$\Leftrightarrow T_1 = \dfrac{T_0}{1-\frac{v}{c}}$.

b) Auf dem Raumschiff gehen die Uhren langsamer:
$T_1' = T_1\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = T_0\cdot\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$.

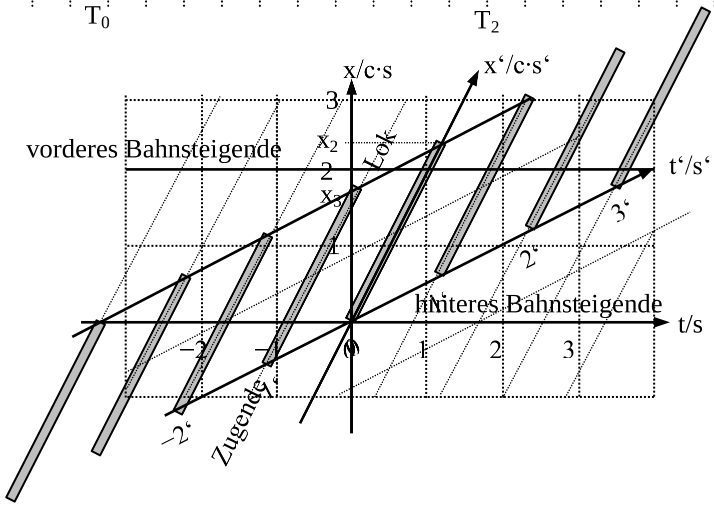
c) Das reflektierte Radiosignal startet zur Zeit T_1 am Ort $v\cdot T_1$ mit der Geschwindigkeit $-c$ nach der Ort-Zeit-Funktion
$x_3(t) = -c(t - T_1) + v\cdot T_1$
$= -c\cdot t + (c + v)\cdot T_1$
und erreicht die Erde für $x_3(T_2) = 0$
$\Leftrightarrow c\cdot T_2 = (c + v)T_1$
$\Leftrightarrow T_2 = T_1\cdot\left(1+\frac{v}{c}\right) = T_0\cdot\frac{c+v}{c-v}$.



Aufgabe 16: Längenkontraktion
1 m

Aufgabe 17: Längenkontraktion

a) siehe rechts
b) $x_2 \approx 2{,}31$ c·s (Gleichzeitigkeit in S)
c) $x_3 \approx 1{,}73$ c·s (Gleichzeitigkeit in S‘)



Aufgabe 18: Lorentz-Transformationen

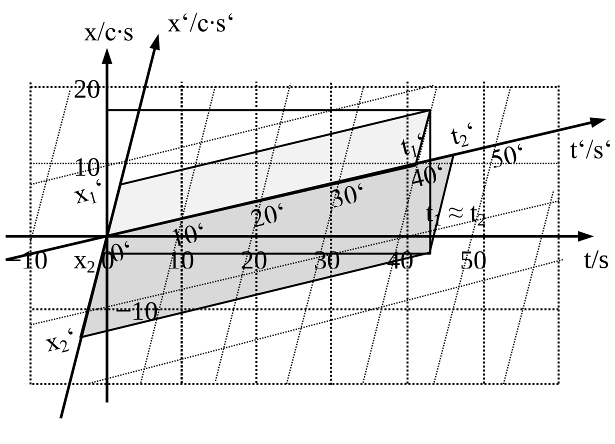
$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \approx 0{,}968$;

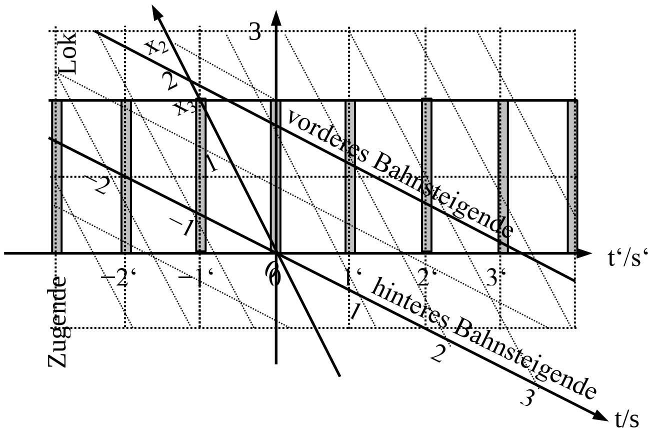
mit $x_1' = 6{,}\overline{6}$ c·s‘ und $x_2' = -13{,}\overline{3}$ c·s‘

$\Rightarrow x_1 \approx 17{,}2$ c·s und $x_2 \approx -2{,}15$ c·s

$\Rightarrow t_1 \approx t_2 \approx 43$ s.

Minkowski-Diagramm: siehe unten:





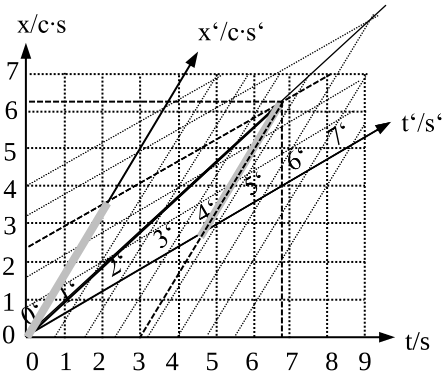
Aufgabe 19: Lorentz-Transformationen
a) $x_0' = 3{,}68 \cdot 10^7$ km und $t_0' = 16.14$ Uhr

b) $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8$ mit $t_1 = 240$ s und $x_1 = 266{,}\overline{6}$ c·s

$\Rightarrow t_1' = 100$ s und $x_1' = 153{,}\overline{3}$ c·s $= 4{,}6 \cdot 10^7$ km und

$\Rightarrow t_0' = 16.11$ Uhr und 40 Sekunden

Aufgabe 20: Lorentz-Transformationen
a) siehe rechts



b) $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8 \Rightarrow$ Zuglänge s = 0,8·s‘ = 2,4 Lichtsekunden‘

c) Die Laufzeit für S‘ ist $t_0' = \frac{s'}{u'} = 3{,}75$ Sekunden‘

$\Rightarrow$ Für S ist die Laufzeit $\Delta t = t_0 = \frac{t_0' + \frac{v}{c} \cdot \frac{x_0'}{c}}{0{,}8} = \frac{3{,}75 + 0{,}6 \cdot 3}{0{,}8}$ s $\approx 6{,}96$ s

d) Das Geschoss ist von S‘ aus betrachtet zur Zeit $t_0' = 3{,}75$ s‘ am Ort $x_0' = 3$ c·s. Von S aus betrachtet steht die Uhr in diesem Augenblick auf $t_0 = 6{,}96$ s und das Geschoss ist am Ort $x_0 = \frac{x_0' - v' \cdot t_0'}{0{,}8} = \frac{3 + 0{,}6 \cdot 3{,}75}{0{,}8}$ c·s $\approx 6{,}56$ c·s

Aufgabe 21: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
m = 0,838 mg

Aufgabe 22: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
$m = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$ mg

Aufgabe 23: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
f = 1,25

Aufgabe 24: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Der Eisensplitter hat den Impuls $p = m \cdot v = 2 \cdot 10^{-7}$ kg$\cdot 33{,}\overline{3}$ m/s $= 6{,}\overline{6} \cdot 10^{-6}$ kg·m/s.

Der Lichtblitz hat den Impuls $m \cdot c = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{2000 \text{ J}}{300\,000\,000 \text{ m/s}} = 6{,}\overline{6} \cdot 10^{-6}$ kg·m/s.

Aufgabe 25: Relativistische Massenzunahme und Masse-Energie-Äquivalenz
Er bewegt sich mit v = 0,6·c und die Masse nimmt um 25 % zu.