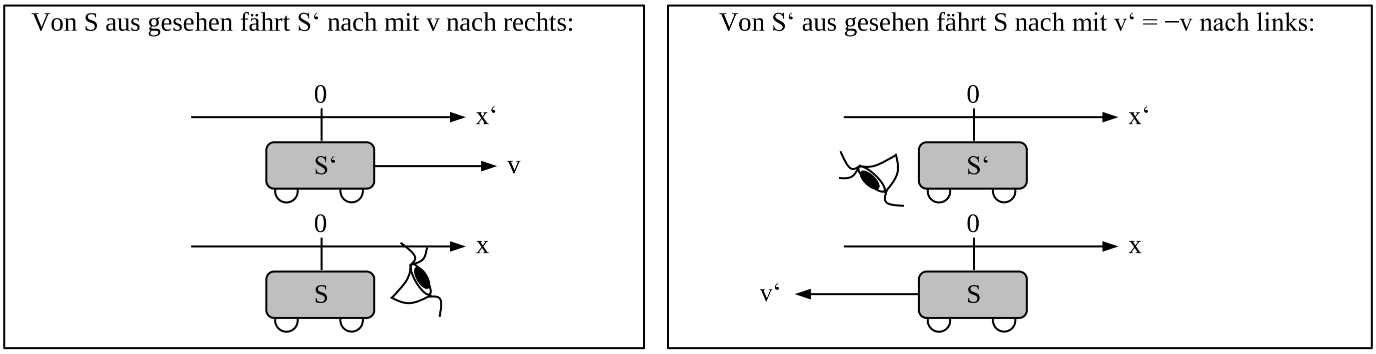
6. Die spezielle Relativitätstheorie

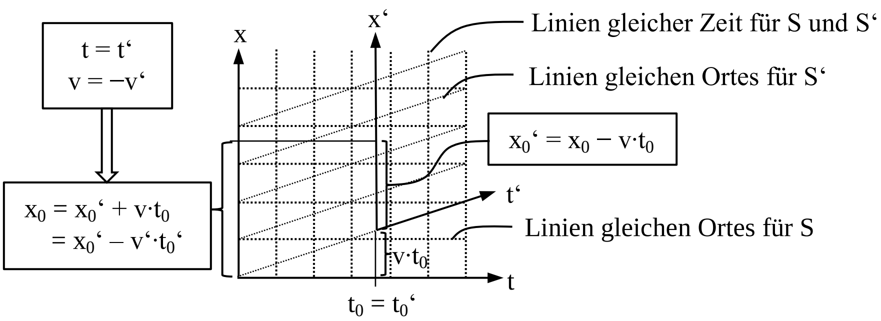
6.1. Inertialsysteme und Galilei-Transformationen

Die **spezielle Relativitätstheorie** erweitert die **Newtonsche Mechanik** für **Inertialsysteme** auf Situationen mit sehr hohen Geschwindigkeiten, wie sie in der Physik der **Elementarteilchen** und der **Himmelskörper** auftreten. **Albert Einstein** (1879 – 1955) gelang mit dieser Theorie im Jahr 1905 eine zusammenhängende Erklärung verschiedener Phänomene und Lösungsansätze auf diesen Forschungsgebieten, die die Grenzen der Newtonschen Mechanik in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts immer deutlicher werden ließen. **Inertialsysteme** (*lat inertia = Trägheit*) sind alle Bezugssysteme, in denen das **Trägheitsprinzip** (**1. Newtonsches Axiom**) gilt: Ein Körper behält seinen Bewegungszustand bei, solange die Summe der auf ihn wirkenden äußeren Kräfte Null ist. Inertialsysteme dürfen daher nicht selbst beschleunigen, sonst würde sich eine Körper wie z.B. ein Kaffeebecher in einem bremsenden oder in die Kurve fahrenden Zug unvermutet in Bewegung setzen, ohne dass eine äußere Kraft auf ihn wirkt. Sie dürfen sich daher höchstens mit **konstanter Geschwindigkeit geradlinig zueinander bewegen**. In solchen Inertialsystemen gilt allgemeiner auch das **2. Newtonsche Axiom** mit $F = m\cdot a$ und damit alle übrigen Gesetzmäßigkeiten der Dynamik.

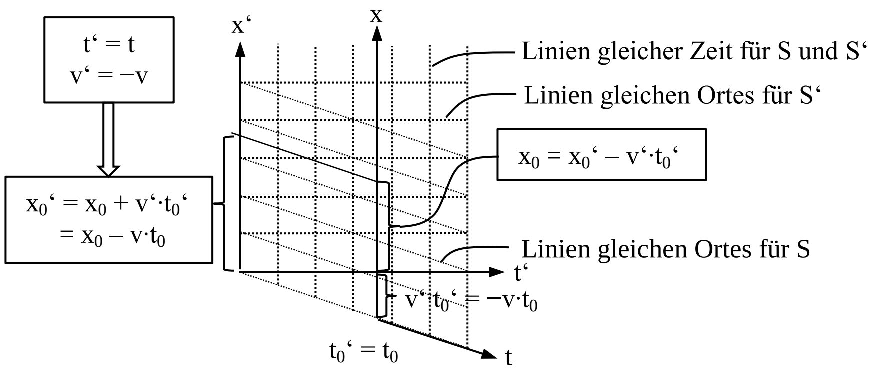
Da in allen Inertialsystemen die gleichen physikalischen Gesetze gelten, sind sie alle **gleichberechtigt**: es gibt kein absolutes Bezugssystem. Seit **Einstein** veranschaulicht man Inertialsysteme gerne mit **Zügen**: Ein mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung fahrender Zug transportiert das Koordinatensystem $S = (x'; t')$. Zur Zeit $t = t' = 0$ passiert der Ursprung von S den Ursprung des Systems $S = (x; t)$, welches sich in einem stehenden Zug auf dem Nebengleis befindet. Von S‘ aus gesehen fährt der stehende Zug S mit $v' = -v$ in negative x‘-Richtung davon:



Die Position eines in S ortsfesten Punktes x_0 zur Zeit t_0 ist dann vom sich auf x_0 zu bewegenden S‘-System aus betrachtet $x_0' = x_0 - v\cdot t_0$. Zusammen mit der **Zeitgleichheit** $t_0' = t_0$ sind dies die **Galilei-Transformationen** von den Koordinaten $(x_0; t_0)$ in S zu den Koordinaten $(x_0'; t_0')$ in S‘. Von S‘ aus wird die Entfernung x_0' immer kleiner, erreicht den Wert $x_0' = 0$, und nimmt negative Werte an, nachdem S‘ an ihm vorbeigefahren ist.



Durch Einsetzen von $t = t'$ und $v = -v'$ erhält man aus x_0' wieder $x_0 = x_0' - v'\cdot t_0'$ zurück. Um die Gleichberechtigung der beiden Systeme und die Symmetrie der Gleichungen zu veranschaulichen, betrachten wir die Situation noch einmal von S‘ aus: Der Punkt $x_0' = x_0 - v\cdot t_0$ bewegt sich zusammen mit S auf den Ursprung von S‘ zu:



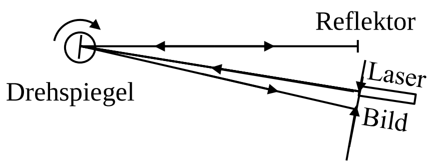
Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 1

6.2. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit des Lichtes versuchte schon **Galilei** im 15. Jahrhundert analog zur Echolotmethode für den Schall zu bestimmen: Ein Mann öffnet die Blende einer Lampe, deren Licht zu einem weit entfernten Spiegel und wieder zurückläuft. Ein zweiter Mann bestimmt die Zeit, die das Licht für diese Strecke benötigt. Allein schon deshalb, weil halbwegs zuverlässige mechanische Uhren erst im 16. Jahrhundert erhältlich waren, ließ sich mit dieser Anordnung bestenfalls die Reaktionszeit des zweiten Mannes bestimmen.

Im Jahr 1672 beobachtete der dänische Hofastronom **Ole Rømer** (1644 – 1710) am Observatorium Paris über viele Wochen den **Jupitermond Io**, der ca. alle 42,5 Stunden aus dem Schatten des Jupiters auftaucht. Diese Periode verlängert bzw. verkürzt sich um wenige Sekunden (!), wenn sich die Erde vom Jupiter weg oder auf ihn zu bewegt und nimmt einen Mittelwert an, wenn die Entfernung konstant bleibt. Nach komplizierten trigonometrischen Berechnungen und unter Berücksichtigung der Bahnexzentrizitäten nach den **Keplerschen Gesetzen** sowie der Einflüsse der anderen Jupitermonde kam Rømer zu dem Ergebnis, dass das Licht ca. 11 Minuten für eine **astronomische Einheit** (Entfernung Sonne-Erde) benötigt. Die Messungen wurden u.a. in **Greenwich** wiederholt und verfeinert, so dass **Isaac Newton** in seinem Buch Opticks (1704) bereits eine Laufzeit von 7 – 8 Minuten angeben konnte. Der genaue Wert ist 8 Minuten 19 Sekunden. Dies alles wurde in einer Zeit erreicht, in der Pest, Inquisition, Folter und Hexenverbrennungen (bis ca. 1750 legal) zum europäischen Alltag gehörten.

Erst im 19. Jahrhundert waren mechanische Apparate und insbesondere Uhren exakt genug, um die Menschen in Galileis Aufbau ersetzen und die Lichtgeschwindigkeit auf der Erde messen zu können. Der **Drehspiegelversuch** von **Léon Foucault** (1819 – 1868) bis heute eine recht genaue Methode (siehe rechts). während das Licht vom Drehspiegel zum festen Spiegel und wieder zurück läuft, hat sich der Drehspiegel bereite etwas weiter gedreht und wirft das Bild der Lichtquelle nach dem Reflexionsgesetz um den doppelten Drehwinkel abgelenkt zurück.



Schon Foucault wunderte sich, dass auf der sich drehenden und mit ca. 30 km/s durch den Weltraum rasenden Erde zu jeder Zeit, an jedem Ort und in jede Richtung die gleiche Lichtgeschwindigkeit gemessen wurde. Seit Newton ging man nämlich in Analogie zum Schall davon aus, dass sich das Licht durch Bewegung kleinster Teilchen im **Äther** ausbreitet. Wie beim Schall müsste dann aber die Lichtgeschwindigkeit bei „Gegenwind" gebremst und bei „Rückenwind" beschleunigt werden. Nachdem auch die genauesten Experimente keinerlei Abweichungen zeigten, stellte der niederländische Physiker **Hendrik Lorentz** (1853 – 1928) im Jahr 1892 die Vermutung auf, dass sich die Messapparatur selbst im Ätherwind zusammenzieht (**Längenkontraktion**) und gleichzeitig die Uhren langsamer laufen (**Zeitdilatation**).

Im Jahr 1905 leitete Albert Einstein die seit Jahren bekannten Lorentz-Transformationen zur Zeitdilatation und Längenkontraktion ohne Ätherhypothese aus zwei einfachen Annahmen her:

1. **Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt**
2. **Die Lichtgeschwindigkeit c ≈ 300 000 km/s ist in jedem Inertialsystem gleich.**

Ebenso wie die Lorentz-Transfomationen waren auch diese beiden Annahmen vorher bekannt und mehr oder weniger akzeptiert. Der Verdienst Einsteins besteht darin, durch konsequente Anwendung dieser beiden **Einsteinschen Postulate** die Phänomene der

1. **Zeitdilatation**
2. **Längenkontraktion**
3. **relativistischen Massenzunahme und der Masse-Energie-Äquivalenz $E = mc^2$**

mit einfachsten mathematischen Mitteln herzuleiten.

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 2 und 3

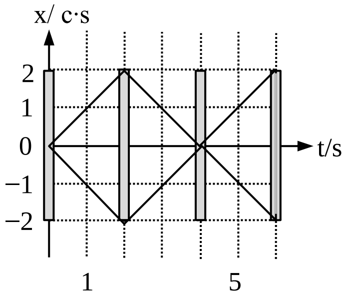
6.3. Minkowski-Diagramme und Uhrenvergleich

Aufgrund ihrer universalen Bedeutung verwenden wir in Zukunft die **Lichtgeschwindigkeit c als Basis** für die Einheiten im Ort-Zeit-Diagramm: Die Zeit t wird in Sekunden, der Ort x/c in **Lichtsekunden** c·s ≈ 300 000 km und die Geschwindigkeit v in Bruchteilen von c angegeben. Lichtstrahlen mit der Geschwindigkeit v = c laufen also mit der Steigung $\frac{v}{c} = 1$. Ein System mit der Geschwindigkeit v = 0,6·c ≈ 180 000 km/s bewegt sich auf einer Ursprungsgeraden mit der Steigung $\frac{v}{c} = 0{,}6$.

Einsteins Lehrer an der ETH **Hermann Minkowski** (1864 – 1909 an Blinddarmdurchbruch) führte diese nach ihm benannten Diagramme 1907 ein, um Einsteins rein algebraische Herleitungen geometrisch zu veranschaulichen und zu begründen. Der mathematische Aufwand wird auf eine einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras reduziert, weshalb Einstein selbst diese Diagramme zunächst nicht ernst nahm. Später erkannte er ihre Vielseitigkeit und nutzte sie für die **allgemeine Relativitätstheorie in beschleunigten Nichtinertialsystemen** (**Gravitationstheorie**).

Die einfache Struktur der Minkowski-Diagramme täuscht leicht über den beträchtlichen intellektuellen Anspruch des ständigen Perspektivenwechsels hinweg. Wir verwenden zur Erleichterung nach Einstein den „**ruhenden**“ Zug S = (x; t) und den mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung „**fahrenden**“ Zug S‘ = (x‘; t‘). Von S‘ aus betrachtet fährt S natürlich mit der Geschwindigkeit v‘ = −v in die Gegenrichtung und S‘ selbst ruht.

Zunächst versucht jeder Beobachter sich in seinem eigenen Zug zu orientieren, indem er die Mitte sucht und anschließend die Uhren mit dem vorderen und hinteren Ende abgleicht. Dazu sendet er z.B. zur Zeit t = 0 ein Funksignal mit dieser Uhrzeit in beide Richtungen. Wenn von beiden Seiten nach z.B. 4 Sekunden gleichzeitig ein Zeitsignal zurückkommt, weiß er, dass er in der Mitte eines 4 Lichtsekunden = 1 200 000 km langen Zuges steht. Außerdem muss das Signal zur gleichen Zeit t = 2 s am vorderen und am hinteren Ende angekommen sein. Er schickt sofort seine Zeit von 4 s zurück. Wieder 2 s später wissen dann die beiden Zugenden genau, wann der Zeiger in der Mitte des Zuges auf 2 s und auf 4 s stand und können ihre Uhren entsprechend stellen. Jede Person in S weiß jetzt, wo sie ist und wie spät es ist.



Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 4 und 5

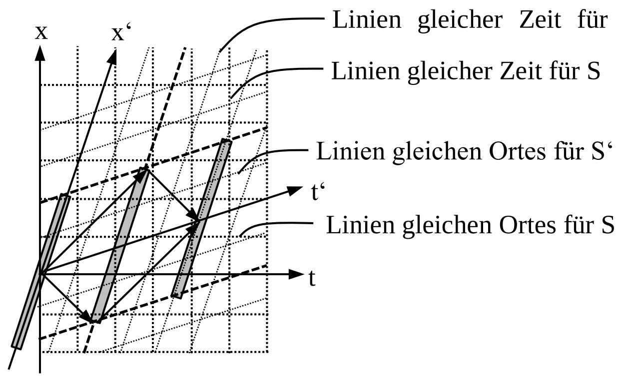
6.4. Die Relativität der Gleichzeitigkeit

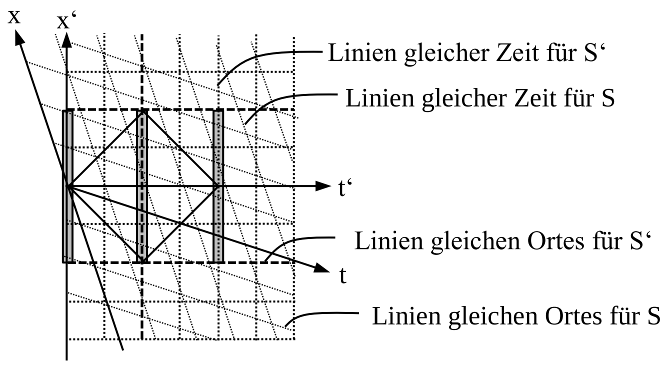
S betrachte nun die Positionsbestimmung und den Uhrenvergleich in **anderen** System S‘. S‘ rast zum Zeitpunkt t = t‘ = 0 an S vorbei und sendet im selben Augenblick sein Zeitsignal an beide Zugenden aus. Nur in diesem einen Augenblick kann S seine Uhr direkt mit S‘ vergleichen; sobald sie sich kosmischer Geschwindigkeit voneinander entfernen, müssten sie wieder auf den Austausch von Funksignalen zurückgreifen.

Wenn der bewegte Beobacher in der Mitte seinen Zuges S‘ steht, müssen die Antworten von seinen Zugenden auch wieder **gleichzeitig** nach 4 Sekunden‘ (**nach seiner Uhr!**) bei ihm eintreffen. Die Reflexion hat dann seiner Ansicht nach zur Zeit t‘ = 2 Sekunden‘ (**nach seiner Uhr!**) **gleichzeitig** an beiden Enden stattgefunden. (Gleichberechtigung aller Inertialsysteme)

Wenn S diese Funksignale betrachtet, die für beide Systeme mit der gleichen Geschwindigkeit c laufen (!), so muss die Reflexion am bewegten **Zugende** aber **früher** stattgefunden haben, damit das Antwortsignal Zeit hat, die bewegte Mitte einzuholen. Die Reflexion am bewegten **Zuganfang** muss dagegen **später** stattgefunden haben, damit das entgegenkommende Antwortsignal nicht zu früh in der Mitte ist.

Die von S‘ aus gleichzeitig eingetretenen Reflexionen liegen für S nicht senkrecht übereinander, sondern versetzt auf einer geneigten Achse, welche seine Ortslinie genau in 2 Sekunden‘ nach seiner Uhr schneidet. **Die Linien gleicher Zeit in S‘ sind also ebenso geneigt wie die Linien gleichen Ortes in S‘**. Von S‘ aus betrachtet sieht die Situation entsprechend umgekehrt aus:



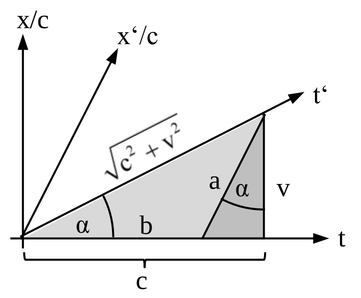


Beachte, dass die Abstände der Linien bzw. die **Einheiten** in S‘ noch nicht geklärt sind. Die Umrechnung **der bewegten (Licht-)Sekunden‘** in **ruhende (Licht-)Sekunden** wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 6 und 7

6.5. Die Geometrie der Minkowski-Diagramme

Für den Maßstabsvergleich in Minkowski-Diagrammen benötigt man immer wieder die Längenverhältnisse in dem rechts gezeichneten Dreieck. Aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Teildreiecke ergeben sich die folgenden Verhältnisse:



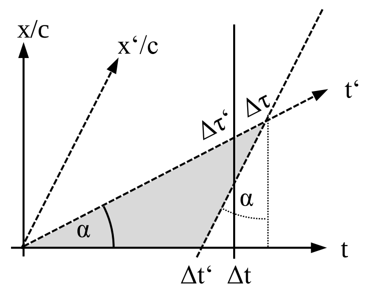
1. $\frac{c-b}{v} = \frac{v}{c} \Rightarrow \boxed{b = c - \frac{v^2}{c} = c\cdot\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}$ und

2. $\frac{a}{v} = \frac{\sqrt{c^2+v^2}}{c} \Rightarrow \boxed{a = \frac{v}{c}\cdot\sqrt{c^2+v^2} = v\cdot\sqrt{1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 8

6.6. Die Zeitdilatation

Wir bestimmen nun das Verhältnis f, in dem die Zeiteinheiten Δt und Δt‘ der Systeme S und S‘ stehen.
Wenn z.B. Δt = 1 Sekunde ist, dann ist Δt‘ = f·Δt der Zeitpunkt auf der t-Achse, in dem **von S‘ aus betrachtet gleichzeitig** die Uhr von S‘ die Zeit Δτ = 1 Sekunde anzeigt.
Umgekehrt ist Δτ‘ = f·Δτ der Zeitpunkt auf der t‘-Achse, in dem **von S aus betrachtet gleichzeitig** die Uhr von S die Zeit Δt = 1 Sekunde anzeigt.



Aus $f = \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\Delta \tau'}{\Delta \tau}$ folgt mit den Ergebnissen aus Aufgabe 8

$$f^2 = \frac{\Delta t'}{\Delta \tau}\cdot\frac{\Delta \tau'}{\Delta t} = \frac{c\cdot\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{\sqrt{c^2+v^2}}\cdot\frac{\sqrt{c^2+v^2}}{c} = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow f = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \text{ bzw. } \boxed{\Delta t' = \Delta t\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Für v = 0,6 c ergibt sich daraus Δt‘ = 0,8·Δt = 0,8 Sekunden. Das ist die **Zeitdilatation**: **Bewegte Uhren laufen langsamer.** Die **bewegten Zeiteinheiten** sind **größer** als die ruhenden. Andererseits könnte man auch von **Kontraktion** sprechen, denn die **bewegten Maßzahlen sind kleiner** als ruhende: S gibt 1 Sekunde an, S‘ aber nur 0,8 Sekunde‘.

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 9 - 15

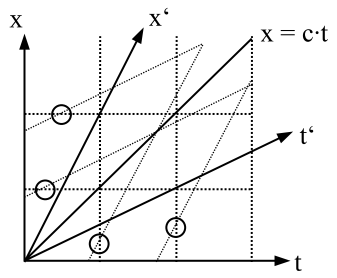
6.7. Längenkontraktion

Wegen v = −v‘ folgt aus der Zeitdilatation $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Leftrightarrow \boxed{\Delta x' = -\Delta x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Für v = 0,6 c ergibt sich für den zurückgelegten Weg von S aus betrachtet Δx = v·Δt = 0,6 Lichtsekunden nach rechts und von S‘ aus gesehen Δx‘ = −0,8·Δx = −0,48 Lichtsekunden‘ nach links. Die Geschwindigkeit ist mit $v' = -\frac{0{,}8 \text{ Lichtsekunden'}}{0{,}48 \text{ Sekunden'}} =$ −0,6 c vom Betrag her gleich. Das ist die **Längenkontraktion**: **Bewegte Maßstäbe erscheinen verkürzt.**

Bewegte Längeneinheiten sind um den gleichen Faktor **vergrößert** wie die Zeiteinheiten, weil das Verhältnis $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ gleich bleiben muss. Man könnte also bezogen auf die **Einheiten** ebenfalls von **Dilatation** sprechen. Das Wort **Kontraktion** bezieht sich hier auf die kleineren **Maßzahlen des bewegten Systems**: S gibt für den aus seiner Sicht ruhenden Maßstab 0,6 Lichtsekunden an, S‘ für den gleichen, jedoch aus seiner Sicht bewegten Maßstab nur 0,48 Lichtsekunden‘.

Graphisch lässt sich die relativistische Dehnung der Maßstäbe gut annähern, indem man die Linien gleicher Zeit von S und S‘ jeweils in der **Mitte zwischen den beiden Zeitachsen** schneidet und entsprechend die Linien gleichen Ortes in der Mitte zwischen den beiden Ortsachsen (siehe rechts).



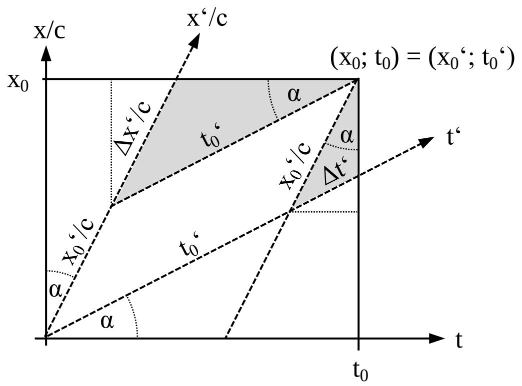
Sehr häufig werden in den Übungsaufgaben die Geschwindigkeiten v = 0,6 c mit dem Umrechnungsfaktor $f = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8$ oder v = 0,6 c mit $f = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 0{,}8$ verwendet. In diesen Fällen sind die Achsenschnittpunkte der Linien bei 0,6; 1,2; 1,8; 2,4; … bzw. 0,8; 1,6; 2,4; 3,0; usw..

Die Schwierigkeit mit der Anwendung dieser im Minkowski-Diagramm geometrisch einsichtigen und symmetrischen Erscheinungen besteht darin, dass unsere biologische Wahrnehmung der physikalisch gleichwertigen Dimensionen Zeit und Raum vollkommen unterschiedlich ist. Das **Raumgefühl** wurde seit der Entwicklung des Auges über Jahrmillionen trainiert und wenige Lebewesen haben Probleme mit der räumlichen Orientierung. Ein **Zeitgefühl** dagegen haben nur die wenigsten Lebewesen und auch bei uns ist es nur unvollkommen ausgeprägt.

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 16 und 17

6.8. Die Lorentz-Transformationen

Die Galilei-Transformation $x_0 = x_0' - v'\cdot t_0'$ und $t_0 = t_0'$ können nun für hohe Geschwindigkeiten präzisiert werden. Die Zeitgleichheit $t_0 = t_0'$ ist nur für Geschwindigkeiten $v < 0{,}01\cdot c$ (also immerhin bis ca. 3000 km/s!) mit ausreichender Genauigkeit erfüllt. Wir betrachten wieder das Minkowski-Diagramm und rechnen die auf S‘ bezogenen Koordinaten des Punkte (x_0'; t_0';) um auf die entsprechenden Koordinaten (x_0; t_0) in S. Bei der Ortskoordinate x_0' wird wie bei der Galilei-Transformation die Korrektur $\Delta x' = -v'\cdot t_0'$ addiert Durch die Neigung der Ortsachse kommt nun aber auch bei der Zeitkoordinate t_0'eine **Korrektur Δt‘ für die veränderte Gleichzeitigkeit des Ortes** hinzu. Diese Korrekturen lassen sich mit Hilfe der grauen Dreiecke wie in Abschnitt 1.11.5 bzw. Aufgabe 8 berechnen. Die zusammengesetzten Koordinaten werden dann nach Abschnitt 1.11.6 und 1.11.7 auf die gestauchte Skala der x-und t-Achse in S angepasst:



Nach Aufgabe 8 b) ist $\frac{\Delta t'}{x_0'/c} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \Delta t' = x_0'\cdot\frac{v}{c^2}$. Wegen der Zeitdilation folgt $t_0 = \frac{t_0' + \Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \boxed{t_0 = \frac{t_0' + \frac{v}{c^2}x_0'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$

Nach Aufgabe 8 c) ist $\frac{\Delta x'/c}{t_0'} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \Delta x' = v\cdot t_0' = -v'\cdot t_0'$. Mit Längenkontraktion ist $x_0 = \frac{x_0' + \Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{x_0' - v'\cdot t_0'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$

Im Vergleich zu den **Galilei-Transformationen** bemerkt man, dass für $v < 0{,}01\cdot c$ der Faktor $f = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1$ und der Faktor $\frac{v}{c^2} \approx 0$ wird. In diesen Fällen und damit in unserem gesamten irdischen Alltag wird die Zeittransformation wieder zu $t_0 \approx t_0'$ und die Ortstransformation zu $x_0 = x_0' - v'\cdot t_0'$.

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 18 - 20

6.9. Die relativistische Massenzunahme und die Masse-Energie-Äquivalenz

Wir betrachten einen Beobachter im System S‘, der sich mit der Geschwindigkeit v_x in x-Richtung bezogen auf das ruhende System S bewegt. **Für den Beobachter in S‘ laufen dann die Uhren in S langsamer**: $\Delta t = \sqrt{1-\left(\frac{v_x}{c}\right)^2}\cdot\Delta t'$. Die Situation ist also **umgekehrt** wie bisher; die Rollen sind vertauscht.

Die **relativistische Massenzunahme** ergibt sich nun aus der Betrachtung der Geschwindigkeit $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ eines Körpers der Masse m bezogen auf System S **senkrecht zur Bewegungsrichtung** von S‘. Aufgrund der von S‘ beobachteten **Zeitdilatation** bei unveränderter Strecke Δy = Δy‘ senkrecht zur Bewegungsrichtung misst er eine **kleinere Geschwindigkeit**

$$v_y' = \frac{\Delta y}{\Delta t'} = \sqrt{1-\left(\frac{v_x}{c}\right)^2}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} = \sqrt{1-\left(\frac{v_x}{c}\right)^2}\cdot v_y.$$

Da der **Impuls** bzw. die Wirkung der Masse z.B. beim Stoß senkrecht zur Bewegungsrichtung sicher gleich bleibt, muss die Masse zum Ausgleich um den gleichen Faktor anwachsen $m\cdot v_y = m' v_y' \Rightarrow$ $\boxed{m' = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$

Das ist die **relativistische Massenzunahme: Bewegte Massen werden träger**.

Das wichtigste Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie ist die aus der relativistischen Massenzunahme folgende **Äquivalenz von Masse und Energie**.

Dazu betrachtet man die **Taylor-Entwickung** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0}\frac{2k+1}{2k!}x^k = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{12}x^3 + \ldots$

und wendet sie an auf die relativistische Massenzunahme $m' = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{12}m\frac{v^6}{c^6} + \ldots$.

Durch Multiplikation mit c^2 erhält man $m'c^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^2}{c^4} + \frac{5}{12}m\frac{v^4}{c^6} + \ldots$

Einstein interpretierte den **gesamten geschwindigkeitsabhängigen Anteil** als **kinetische Energie**:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^2}{c^4} + \frac{5}{12}m\frac{v^4}{c^6} + \ldots \approx \frac{1}{2}mv^2 \text{ für } v < 0{,}01\text{ c}.$$

Man erhält $\mathbf{m'c^2 = mc^2 + E_{kin}}$ und damit die Interpretation der **Äquivalenz von Masse und Energie**: **Die gesamte Energie $\mathbf{mc^2}$ eines Körpers ist gleichwertig zu seiner Masse m**. Der Faktor c^2 dient nur zur Anpassung der menschlichen Einheiten von Masse und Energie. Beschleunigt man den Körper auf die Geschwindigkeit v, so äußert sich die **hinzugefügte kinetische Energie als Massenzunahme: $\mathbf{E_{kin} = m'c^2 - mc^2 = \Delta m\cdot c^2}$**.

Die **experimentelle Bestätigung** dieser im Jahre 1905 ziemlich kühnen Deutung erfolgte erst Jahrzehnte später bei der Erforschung und Anwendung von **Kernfusion** in den Sternen sowie der **Kernspaltung** bei Atomwaffen und Kernreaktoren: Der bei solchen Reaktionen beobachtete **Massenverlust** Δm lässt sich tatsächlich aus der abgegebenen Wärme (= kinetische Energie kleinster Teilchen) E_{kin}/c^2 berechnen!

Übungen: Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Nr. 21 - 25