

Aufgabe 8: de Méré-Problem

Der Chevalier de Méré befragte um 1650 in Paris den Mathematiker Blaise Pascal nach den Gewinnchancen der beiden folgenden Ereignisse:

- Beim 4-maligen Würfeln mindestens eine Sechs
- Beim 24-maligen Würfeln mit jeweils 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs.

Er war der Meinung, dass die Gewinnchancen gleich seien, denn bei a) ist zwar die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Einzelwurf 6 mal so klein, dafür wird der Versuch aber 6 mal so oft wiederholt. Wie ist deine Meinung?

Aufgabe 9: de Medici-Problem

Der Herzog Ferdinando de Medici fragte den Mathematikprofessor Galileo Galilei um 1600 in Florenz, warum beim Werfen dreier Würfel die Augensumme 10 öfter erscheine als die Augensumme 9, obwohl man beide Summen auf jeweils gleich viele Arten als Summe von drei Zahlen schreiben könne. Wie ist deine Meinung?

Aufgabe 10: Lotto mit Zusatzzahl

- Berechne die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl. Die Zusatzzahl wird im Anschluß an die die 6 Gewinnzahlen aus der gleichen Urne gezogen.
- Beim Lotto mit Zusatzzahl werden insgesamt 7 Zahlen gezogen, von denen 6 richtig sein müssen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige beim Lotto „7 aus 49“ und vergleiche mit a).

Aufgabe 11: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim einmaligen Würfeln

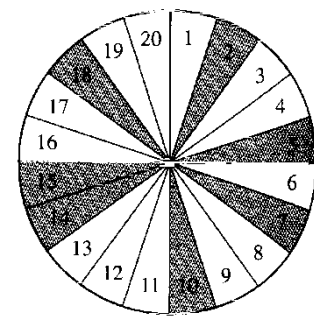
Ein Spieler zahlt 2 €, um an dem folgenden Spiel teilzunehmen. Würfelt er eine gerade Augenzahl, so muss er den Betrag der Augenzahl in € an die Bank zahlen. Würfelt er eine ungerade Augenzahl, so erhält er das Doppelte der Augenzahl von der Bank als Gewinn. Die Zufallsvariable $X(e)$ gibt den Gewinn bzw. Verlust des Spielers bei der Augenzahl e an.

- Stelle eine Wertetabelle für $X(e)$ auf.
- Berechne den Erwartungswert $E(X)$.
- Korrigiere den Einsatz so, dass das Spiel fair wird.

Aufgabe 12: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Glücksrad

Ein Spieler zahlt 1 €, um einmal an dem Glücksrad drehen zu dürfen. Er gewinnt doppelten Betrag der roten Zahlen und verliert den einfachen Betrag der weißen in €.

- Stelle eine Wertetabelle für $X(e)$ auf.
- Berechne den Erwartungswert $E(X)$.
- Korrigiere den Einsatz so, dass das Spiel fair wird.



den
Zahlen

Aufgabe 13: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

Oliver und Markus spielen mit einem regelmäßigen Dodekaeder (Zwölfflächner) mit den Zahlen 1 bis 12. Wenn eine Primzahl fällt, zahlt Oliver den Betrag der Zahl in € an Markus, andernfalls bekommt er den Betrag der gewürfelten Zahl in € von Markus.

- Ist das Spiel fair?
- Nach ein paar Tagen verlangen Markus' Eltern die Festlegung aller Gewinnsätze auf genau 1 €. Ist das Spiel jetzt fair?

Aufgabe 14: Varianzen und Standardabweichung beim Würfeln und beim Glücksrad

- Berechne die Varianzen und Standardabweichungen bei den Aufgaben 1 - 3.
- Wie unterscheiden sich die Standardabweichungen bei fairen und unfairen Spielversionen?
- Welches der drei Spiele hat das höchste Risiko?

Aufgabe 15: Erwartungswert und Standardabweichung bei einer Bernoulli-Kette

Eine zwölfte Klasse veranstaltet am letzten Schultag das folgende Glücksspiel. Gegen einen Einsatz von 1 € darf jeder einmal würfeln. Fällt eine 6, so erhält er 6 € von der Bank, bei allen anderen Zahlen erhält er nichts. Die Schulleitung genehmigt das Spiel, aber im nachhinein melden die Eltern heulender Fünftklässler ethische Bedenken an.

- Zeige, dass das Spiel auch bei 5 Durchgängen fair bleibt.
- Berechne die Standardabweichung nach 5 Spielen.
- Gib das Pleiterisiko in den ersten 5 Spielen für einen Fünftklässler an, der sein gesamtes Taschengeld von 5 € einsetzt.

Aufgabe 16: Erwartungswert und Standardabweichung bei Lebensversicherung

Die folgende Tabelle gibt die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer bestimmten Berufs- bzw. Risikogruppe an:

Überlebenswahrscheinlichkeit	90 %	70 %	40 %	20 %	10 %	7 %	3 %
bis zum Alter	70	75	80	85	90	95	100

Eine Versicherung möchte für diese Risikogruppe einen Vertrag anbieten, der dem Versicherungsnehmer vom 65. Lebensjahr an eine monatliche Rente von 1000 € garantiert.

- Berechne die Versicherungsprämie so, dass im Mittel ein Gewinn von 10 % der Prämie für die Versicherung erzielt wird.
- Die Versicherung legt für den Fall unerwarteter Langlebigkeit für jeden Versicherungsnehmer eine Rücklage in Höhe der Standardabweichung vom zu erwartenden Gewinn zurück. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Rücklage für einen sehr langlebigen Versicherungsnehmer nicht ausreicht (Pleiterisiko!).

Aufgabe 17: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

Das Glücksrad aus Aufgabe 2 wird 20 mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft eine rote Zahl erscheint

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X .
- Skizzieren Sie mit Hilfe von μ und σ das Histogramm von X
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um weniger als σ von ihrem Erwartungswert μ ab?
- Wie oft muss man drehen, um mit 99 %-iger Sicherheit mindestens eine rote Zahl zu erreichen?

Aufgabe 18: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

Ein idealer Würfel wird 200 mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei die 6 gewürfelt wurde.

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X .
- Skizzieren Sie mit Hilfe von μ und σ das Histogramm von X
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um weniger als σ von ihrem Erwartungswert μ ab?
- Wie oft muss man würfeln, um mit 99 %-iger Sicherheit mindestens eine 6 zu werfen?

3.3. Lösungen zu den Aufgaben zur Binomialverteilung

Aufgabe 1: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung

$$P(X = k) = B_{n, 1/6}(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} \Rightarrow$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	16,1%	32,3%	29,1%	15,5%	5,4%	1,3%	0,2%	0,002%	$1,9 \cdot 10^{-3}\%$	$8,3 \cdot 10^{-5}\%$	$1,7 \cdot 10^{-6}\%$

$$\Rightarrow E(X) = 1,67$$

Aufgabe 2: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung

$$P(X = 3) = B_{10;0,5}(3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \approx 11,7 \%$$

$$P(X \leq 3) = B_{10;0,5}(0) + \dots + B_{10;0,5}(3) = (1 + 10 + 45 + 120) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \approx 17,2 \%$$

$$\Rightarrow E(X) = 5$$

Aufgabe 3: Binomialverteilung

- a) $B_{11,0,3}(7) = 0,0173$ d) $B_{10,0,3}(X \leq 6) = 0,98941$ g) $B_{15,0,3}(2 \leq X \leq 6) = 0,83358$
 b) $B_{19,0,6}(8) = 0,0532$ e) $B_{10,0,9}(X \leq 3) = 0,00001$ h) $B_{20,0,4}(6 \leq X \leq 9) = 0,62974$
 c) $B_{14,0,4}(9) = 0,0408$ f) $B_{20,0,6}(X \leq 11) = 0,40440$ i) $B_{10,0,7}(6 \leq X \leq 8) = 0,70042$

Aufgabe 4: Mädchen und Jungen

- a) $B_{7,0,52}(4) = 28,3 \%$ b) $B_{7,0,52}(X \leq 4) = 73,93 \%$

Aufgabe 5: Nebenwirkungen

- a) $B_{200,0,1}(30) = 0,68 \%$ b) $B_{200,0,1}(X > 30) = 1 - B_{200,0,1}(X \leq 30) = 0,95 \%$

Aufgabe 6: Qualitätskontrolle

- a) $B_{20,0,05}(X \leq 3) = 98,41 \%$
 b) $B_{20,0,05}(X \leq 2) = 92,45 \%$ $\Rightarrow B_{20,0,05}(X > 2) = 7,55 \% < 10 \%$

Aufgabe 7: Irrfahrt

- a) $P(P(7|5)) = B_{12;0,5}(7) = \binom{12}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} \approx 19,4 \%$
 b) $P(\text{Erst } Q(4|3) \text{ und dann } P(7|5)) = B_{7;0,5}(4) \cdot B_{5;0,5}(3) = \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} \approx 8,6 \%$
 c) $E(X) = 6$

Aufgabe 8: de Méré-Problem

- a) $P(\text{mindestens eine Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechs}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 51,8 \%$
 b) $P(\text{mindestens eine Doppelsechs}) = 1 - P(\text{keine Doppelsechs}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49,1 \%$

Aufgabe 9: de Medici-Problem

$$P(\text{Augensumme } 9) = P(1,2,6) + P(1,3,5) + P(1,4,4) + P(2,2,5) + P(2,3,4) + P(3,3,3)$$

$$= (3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 + 1) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{216} \approx 11,6 \%$$

$$P(\text{Augensumme } 10) = P(1,3,6) + P(1,4,5) + P(2,2,6) + P(2,3,5) + P(2,4,4) + P(3,4,3)$$

$$= (3 \cdot 3! + 3 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{27}{216} = 12,5 \%$$

Aufgabe 10: Lotto mit Zusatzzahl

a) $P(5 \text{ Richtige und Zusatzzahl}) = \binom{6}{5} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{43}{44} \cdot \frac{1}{43} = 6 \cdot P(6 \text{ Richtige}) = 2\,330\,636^{-1}$.

b) $P(6 \text{ Richtige von } 7) = \binom{7}{6} \cdot \frac{7}{49} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{5}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} \cdot \frac{42}{43} = 36\,522,35^{-1} \approx 36,8 \cdot P(5 \text{ Richtige und Zusatzzahl})$. Die

Gewinnchance ist hier höher als bei a), weil man 7 Versuche anstelle von 6 hat und die Nieten an 7 Stellen stehen darf anstelle von 6.

Aufgabe 11: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim einmaligen Würfeln

e	1	2	3	4	5	6
X(e)	0	-4	4	-6	8	-8

$\Rightarrow E(X) = -1 \text{ €} \Rightarrow$ korrigierter Einsatz 1 €

Aufgabe 12: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Glücksrad

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X(e)	-2	3	-4	-5	9	-7	13	-9	-10	19	-12	-13	-14	27	29	-17	-18	35	-20	-21

$\Rightarrow E(X) = -0,85 \text{ €} \Rightarrow$ korrigierter Einsatz 0,15 €

Aufgabe 13: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(e)	1	2	3	-4	5	-6	7	-8	-9	-10	11	-12
X'(e)	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1

$X =$ Gewinn von Markus $\Rightarrow E(X) = -1,67 \text{ €}$

$X' =$ Gewinn von Markus $\Rightarrow E(X') = 0$

Aufgabe 14: Varianzen und Standardabweichung beim Würfeln und beim Glücksrad

Aufgabe 1: $V(X) = 30,22 \text{ €}^2$ und $\sigma \approx 5,50 \text{ €}$

Aufgabe 2: $V(X) = 281,93 \text{ €}^2$ und $\sigma \approx 16,79 \text{ €}$

Aufgabe 3: $V(X) = 61,66 \text{ €}^2$ und $\sigma \approx 7,85 \text{ €}$

Aufgabe 3: $V(X') = 1 \text{ €}^2$ und $\sigma' \approx 1 \text{ €}$

Aufgabe 15: Erwartungswert und Standardabweichung bei einer Bernoulli-Kette

k	0	1	2	3	4	5
X(k)	-5	1	7	11	17	23
$P(k) = B_{5, 1/6}(k)$	0,402	0,402	0,161	0,032	0,003	0,0001

$E(X) = 0$, $V(X) = 23,08 \text{ €}^2$ und $\sigma = 4,80 \text{ €}$; Pleiterisiko = $B_{5, 1/6}(5) = 40,2 \text{ ‰}$

Aufgabe 16: Erwartungswert bei Lebensversicherung

Da die meisten Kunden nicht genau am Ende sondern irgendwann im Laufe der gegebenen Fünfjahresabschnitte sterben werden, muss man für die Berechnung der zu erwartenden Auszahlungen ein mittleres Sterbedatum willkürlich festsetzen. Hier wird einfach jeweils die Mitte der Fünfjahresabschnitte gewählt. **Beispiel:** Von den 90 %, welche das Alter 70 erreichen, sind beim Alter 75 noch 70 % übrig. 20 % sterben also zwischen 70 und 75 und erhalten daher im Mittel 7,5 Jahre = 90 Monate Rente. Entsprechend kann man annehmen, dass die 3 %, welche 100 Lebensjahre erreichen, durchschnittlich auch nach 2,5 Jahren tot sind. X sei die insgesamt ausbezahlte Rente:

t in Monaten	30	90	150	210	270	330	390	450
X(t)	30 000	90 000	150 000	210 000	270 000	330 000	390 000	450 000
P(t)	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,03	0,04	0,03

$\Rightarrow E(X) = 174\,000 \text{ €}$. Da noch 10 % Gewinn abfallen sollen, müsste die Prämie $P = \frac{E(X)}{0,9} = 193\,333 \text{ €}$ betragen.

$V(X) = 9\,720\,000\,000 \text{ €}^2$, $\sigma \approx 98\,590 \text{ €}$, $P(X > E(X) + \sigma) = P(X > 272\,590 \text{ €}) \approx P(t > 272 \text{ Monate}) \approx 10 \text{ ‰}$

Aufgabe 17: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

- a) $\mu = 7$ und $\sigma = 2,13$
- b) Histogramm mit Maximum bei $P(X = 7) = 18,4 \%$ (Skalierung der y-Achse!) und Wendepunkten bei $P(X = 5) = 12,7 \%$ und $P(X = 9) = 11,6 \%$
- c) $P(|X - \mu| < \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) = 76,00 \%$
- d) $P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{20}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \ln(100) - \ln\left(\frac{20}{7}\right) = 3,55 \Rightarrow$ mind. 4 mal drehen

Aufgabe 18: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

- a) $\mu = 33,3$ und $\sigma = 5,27$
- b) Histogramm mit Maximum bei $P(X = 33) = 7,56 \%$ (Skalierung der y-Achse!) und Wendepunkten bei $P(X = 29) = 5,6 \%$ und $P(X = 38) = 4,91 \%$
- c) $P(|X - \mu| < \sigma) = P(29 \leq X \leq 38) = 65,65 \%$
- d) $P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25,26$

\Rightarrow mindestens 26 mal würfeln